Teknillinen Korkeakoulu
CFD-group/ Laboratory of Applied Thermodynamics

MUISTIO No CFD/TERMO-24-97 pvm 18. joulukuuta, 1997

OTSIKKO

Kirjallisuuskatsaus kokoonpuristumattoman virtauksen ratkaisemisesta limittämättömässä hilassa.

LAATIJA(T)
Ari Miettinen

TIIVISTELMÄ

Työ on katsaus artikkeleihin, joissa käsitellään kokoonpuristumattoman virtauksen ratkaisemista limittämättömissä hiloissa. Pääpaino on painekorjaukseen perustuvissa menetelmissä. Päätarkoituksena on ollut selvittää solun pintanopeuden laskennassa käytettyjä menetelmiä. Lisäksi kustakin artikkelista on selvitetty konvektion diskretointi, koordinaatiston valinta, muuttujien valinta, muuttujien päivitys, ja yhtälöiden välinen kytkentä.

SIVUJA
44

AVAINSANAT

colocated grid, Rhie & Chow interpolation

TARKASTANUT

Timo Siikonen December 18th, 1997

1 Johdanto

Tämä kirjoitelma on lähinnä kirjoittajan omaan käyttöön tarkoitettu muistio artikkeleista, jotka käsittelevät lähinnä kokoonpuristumattoman virtauksen ratkaisemista limittämättömässä hilassa. Tästä johtuen kirjoitelma on esimerkiksi käytettyjen symboleiden osalta epäjohdonmukainen. Artikkeleiden käsittely ei myöskään noudata mitään kaavaa, vaan lähinnä kunkin artikkelin kirjoittajan käyttämää esitysjärjestystä. Mutta kaikesta huolimatta artikkeleista on pyritty kaivamaan oleellisimmat seikat esiin.

Tässä paperissa tarkastellaan kokoonpuristumattomille virtauksille kehitettyjä lähinnä kontrollitilavuuspohjaisia (control-volume based) ratkaisijoita. Pääpaino on limittämättömissä (colocated) rakenteellisissa hiloissa. Joukossa on myös muutamia rakenteettoman (unstructurated) ja limitetyn (staggered) hilan ratkaisijoita.

Limittämättömässä hilassa joudutaan käyttämään solun pintanopeuksille (cell-face velocity) melko monimutkaisia interpolaatio-kaavoja paineen oskillointien välttämiseksi. Tässä kirjoitelmassa keskitytään lähinnä näiden interpolanttien tarkasteluun. Lisäksi huomiota kiinnitetään nopeuden ja paineen väliseen kytkentään, koordinaatistoon, muuttujien valintaan ja päivitykseen, konvektion diskretointiin, ja yhtälöiden väliseen kytkentään. Nopeuden ja paineen väliseen kytkentään käytetään lähinnä painekorjaus-, virtafunktio-pyörteisyys- tai ns. paineyhtälömenetelmää. Näistä keskimmäinen soveltuu lähinnä 2D laskentaan, ja siksi siihen ei paneuduta. Koordinaatistot voidaan jakaa karteesisiin ja yleisiin. Monimutkaiset geometriat ja niiden solujen taseyhtälöt voidaan esittää paikallisten käyräviivaisten koordinaattien tai pintojen normaalivektoreiden avulla. Näistä jälkimmäinen on luonnollinen osa kontrollitilavuusmenetelmää. Käyräviivaisten koordinaattien yhteydessä joudutaan tekemään koordinaatiston muunnoksia Jacobin matriisien avulla, ja menetelmässä paistaa voimakkaasti "differenssihenki". Lähes aina liikemääräyhtälöissä käytetään muuttujina karteesisia nopeuskomponentteja riippumatta käytettävän koordinaatiston tyypistä. Solujen pintanopeudet esitetään lähes poikkeuksetta kontravariantteja komponentteja käyttäen. Tässä paperissa yhtälöiden välisellä kytkennällä tarkoitetaan yhtälöryhmän ratkaisutapaa. Yhtälöryhmä voidaan ratkaista kokonaisuutena (coupled solution), yhtälö kerrallaan (segregated solution), tai edellisten kombinaationa l. esimerkiksi liikemääräyhtälöt yhtenä kokonaisuutena ja jatkuvuusyhtälö erikseen.

2 Artikkelikohtainen tarkastelu

Seuraavaksi tarkastellaan käytettyjä menetelmiä artikkelikohtaisesti painottaen pintanopeuden laskentaa. Lisäksi kunkin artikkelin ratkaisijasta esitetään johdannossa mainitut piirteet. Yksikäsitteisesti esitetyt seikat todetaan. Päättelyyn tai ”artikkelin henkeen” pohjautuvat piirteet esitetään asiaan kuuluvassa valossa, etteivät ne sekoittuisi varman tiedon kanssa.

2.1 Date [1]

Ratkaisijaa ei kuvata kovinkaan yksityiskohtaisesti. Date käyttää *karteesista hilaa*. Paine ja nopeudet kytketään *SIMPLE-tyyppisellä painekorjausmenetelmällä*. Konvektio mallinnetaan *1. kertaluvun upwind'illä*. Pintanopeuksien päivityksestä painekorjauksen jälkeen ei mainita mitään.

Artikkelissa Date esittelee uutta menetelmäänsä limittämättömän hilan paine-oskilloinnin torjunnassa. Rhie & Chow interpolointia [2] Date pitää jotenkin tyylittömänä, vaikkakin menetelmää on käytetty paljon. Date mainitsee artikkelinsa tarkoituksena

> 1) esittää fysikaalinen perusta pintanopeuden laskennalle ja ehdottaa Rhie & Chow interpolointia yksinkertaisemman lausekkeen
>
> 2) demonstroida, ettei Rhie & Chow-interpoloinnin kaltaista pintanopeuden lauseketta tarvita, vaan sopivan painegradientti-formulan käyttö liikemääräyhtälöissä on riittävä ehkäisemään paineen oskilloinnin.

Date esittää hyvin sen, mitä tuo painegradienttien erotus face-nopeuden lausekkeessa tarkoittaa: poikkeama lineaariesta paine-jakaumasta, 'departure from linearity of pressure' kuva [1]:2 ja kaavat [1]:(14)-(20). Jos painejakauma on lineaarinen välillä WW-W-P-E, niin Rhie & Chow-interpoloinnin painegradienttien erotus pisteessä w on nolla ja face-nopeus lasketaan viereisten nopeuksien keskiarvona. Rhie & Chow interpolointia hän yleistää painegradienttien lineaarikombinaationsa avulla, mikä ei lopultakaan paranna mitään. Date esitti pintanopeudelle

$$
\begin{aligned}
u_e = .5(u_P + u_E) + \beta\Big(\frac{A}{AP_e}[.5(p_P + p_{EE}) - p_E]\Big) \\
(1-\beta)\Big(\frac{A}{AP_e}[p_P - .5(p_W + p_E)]\Big)
\end{aligned}
\tag{1}
$$

joka valinnalla $\beta = 0.5$ ja parin välivaiheen jälkeen voidaan kirjoittaa 'tavalliseksi Rhie & Chow interpoloinniksi'. Date kertoo, ettei valinta $\beta = 0.5$ (eräänlainen keskeisdifferenssi) ole aina paras mahdollinen, mikä on varmasti totta. Mutta kuinka muuten kuin kokeilemalla keksitään parempi ”ylä- tai alavirtapainotteinen Rhie & Chow”. Lisäksi valinta $\beta \neq 0.5$ alentaa pintanopeuden tarkkuutta.

Date viittaa Han'in [3] paperiin, joka käyttää samanlaista kokemusperäistä painokerrointa massabalanssin vaimentimessa kuin Johansson ja Davidson [4] käyttävät. Molemmista papereista lisää myöhemmin.

Seuraavaksi Date sijoittaa pintanopeuden lausekkeen liikemääräyhtälöön [1]:(24), johon syntyy lisätermi. Hän tulkitsee tuon lisätermin liikemääräyhtälön painegradientin korjaukseksi, mistä on helppo siirtyä painegradientin kimppuun. Solujen ja ”limitettyjen solujen” liikemääräyhtälöiden avulla Date johtaa solun painegradientille lausekkeen (38), jonka pitäisi poistaa paineen tuloksesta sahalaidan. Daten mukaan pintanopeudet voidaan nyt laskea keskiarvona solujen nopeuksista. Siikonen on kokeillut Date'n esittämää menetelmää, muttei se toiminut. Daten painetermi [1]:(38) vastaa pinnan molemminpuoleisen 2. kertaluvun upwindin keskiarvoilla mallinnettua painegradienttia solun keskipisteessä.

Daten paperista tuli selväksi, että sahalaitaa ilmenee karkealla hilalla, ja sen tulisi vaimentua hilaa tihennettäessä. Daten testilaskut on suoritettu vaatimattomilla Re:n ja Ra:n luvuilla, ja mikä oleellisinta, reunaehdoista ei juuri puhuta. Lähdeviitteistä kannattaa hakea tuo Han'in paperi. Osa viiteistä on väitöskirjoja tai laboratorio-julkaisuja, joita on hankala saada.

2.2 Date [5]

Daten uudemmassa artikkelissa korjataan edellisen päätelmiä: pintanopeuden laskenta Rhie & Chow-interpoloinnin kaltaisella lausekkeella, tai modifioidun painegradientin käyttö liikemääräyhtälöissä ei ole tarpeellista, ja voi pahimmassa tapauksessa johtaa surkeaan lopputulokseen, paineoskillointiin. Sen sijaan tulee käyttää oikeanlaista painekorjausyhtälöä, jossa esiintyy ”Date'n uusi löytö”, lisätermi ”smoothig pressure correction”. Sen avulla voidaan pintanopeudet liikemääräyhtälöissä ja jatkuvuusyhtälössä laskea soluarvojen keskiarvona, kuten myös liikemääräyhtälöiden painetermitkin. Pintanopeuden käsite voidaan Date'n mielestä unohtaa, sillä *”painekorjatut” pintanopeudet lasketaan korjattujen solunopeuksien keskiarvona.* Mielenkiintoista on, että Date lisää painekorjaukseen (-yhtälöön) vaimennusosan, joka vähennetään Poisson-yhtälön ratkaisusta ennen painekorjausta. *Ohjelman pitäisi yksinkertaistua näillä resepteillä.*

Date esittää mielenkiintoisen havaintonsa: ”It has been experience of the present author that the Rhie and Chow [2] procedure tolerates inconsistencies in the representation of the cell face velocities as they occur in mass-source evaluation and in the evaluation of convective coefficients.” Date toteaa, että hänen edellisen artikkelinsa painegradienttien modifikaatiot liikemääräyhtälöissä voivat johtaa oskilloivaan painekenttään. Date väittää, ettei massayhtälön pintanopeuden laskentakaavalla tai liikemääräyhtälöiden painegradienttien modifikaatioilla [1] ole mitään tekemistä paineen oskilloinnin torjunnassa. Jälkimmäisen osalta on vaikea sanoa, mutta ensimmäinen väite ei pidä paikkansa. *Tuo Daten lisätermin kaltainen ”vaimennin” voidaan viedä jatkuvuusyhtälöön* *pintanopeuksien avulla!* Tätä Date ei huomaa tai halua todeta.

Date esittää limittämättömän hilan pintanopeuden laskennasta lyhyen katsauksen. Rhie & Chow-interpoloinnin käyttäjiä mm. Date [1], Miller ja Schmidt [6]

$$u_e^* = 0.5(u_P^* + u_E^*) + \frac{V}{AP^u}\bigg|_e \left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial p^*}{\partial x}\bigg|_P + \frac{\partial p^*}{\partial x}\bigg|_E \right) - \frac{\partial p^*}{\partial x}\bigg|_e \right] \tag{2}$$

Peric'in väitöskirja (1985) ja Majumdar'in laboratorio-julkaisu Karlsruhe'ssa (1986) sisältävät pintanopeuden lausekkeen

$$u_e^* = \frac{1}{2}\left(\frac{\sum A_i u_i^*}{AP^u}\bigg|_P + \frac{\sum A_i u_i^*}{AP^u}\bigg|_E \right) - \left[\frac{V}{AP^u}\frac{\partial p^*}{\partial x} \right]_e \tag{3}$$

ja oikean puolen ensimmäinen termi on keskeisdifferenssi-interpolaatio limitetyn hilan liikemääräyhtälön naapuripisteiden kontribuutioista

$$\frac{\sum A_i u_i^*}{AP^u}\bigg|_e = \frac{1}{2}\left(\frac{\sum A_i u_i^*}{AP^u}\bigg|_P + \frac{\sum A_i u_i^*}{AP^u}\bigg|_E \right) + O(\Delta x^2) \tag{4}$$

Tuo Peric'in esitys (3) vaikuttaa melko kömpelöltä, ja lieneekin sen takia vähemmän suosittu kuin Rhie & Chow'n ehdotus [2]. Lisäksi Peric'in esitys on käytännöllisesti katsoen sama kuin Rhie'n ja Chow'n, minkä Date'kin mainitsee viitaten kirjoitukseensa Karlsruhe'ssa (1991). Peric'in esittämää interpolaatiota ovat käyttäneet ainakin Kobayashi ja Pereira [7]. Aksoy ja Chen (1992) ovat esittäneet modifikaation, jonka pitäisi muistuttaa Johansson'in ja Davidson'in esitystä [4]. Thiart'in [8] ja [9] limittämättömän hilan ratkaisijassa pintanopeudet lasketaan hankalasti. Hän integroi liikemääräyhtälön limitetyn hilan ylitse saaden pintanopeudelle pitkähkön lausekkeen. Lisäksi hän käyttää Spalding'in [10] esittämää hankalaa eksponentiaali-diskretointia, joka perustuu 1D konvektio-diffuusioyhtälön analyyttiseen ratkaisuun. Thiart'in esitys on oikeastaan askel taaksepäin Rhie & Chow-interpoloinnista. *Mielenkiintoista on, että Miller ja Schmidt'ssä [6] on tehty havainto, että pintanopeudet ovat pahimmillaan ulkona pinnan viereisten kopppien arvojen alueelta, kun paine poikkeaa voimakkaasti lineaarisesta jakaumasta (eli hila liian harva?).*

Date'n kokemus on, että painetermejä tarvitaan vain massayhtälön pintanopeuksissa (saman on havainnut Siikonen).

Seuraavaksi painotetaan kehitettävän painekorjausyhtälön tärkeyttä. Tuon painekorjausyhtälön johto muistuttaa jo lähes uskonnollista rituaali, jota esiintyy usein myös artikkelien Rhie & Chow-interpoloinnin esittelyissä.

Daten menetelmä on seuraavanlainen:

1. Arvataan paine.
2. Lasketaan liikemääräyhtälöistä, joissa pintanopeudet $u_e = 0.5(u_P + u_E)$ etc. ja solun pintapaine $p_e = 0.5(p_P + p_E)$, u ja v arvatulla paineella.
3. Lasketaan painekorjaus (36), missä pintanopeudet laskettu kaavalla $u_e = 0.5(u_P + u_E)$ etc. Painekorjauksen reunaehtona on $\partial p'/\partial n = 0$.
4. Vähennetään kohdassa 3 lasketusta painekorjauksesta vaimennusosa tai "smoothing pressure correction, kuten Date termiä kutsuu. Käytössä Date'n "multidimensional averaging" (40).
5. Korjataan solujen nopeudet ja paineet. *Pintanopeudet lasketaan korjattujen solunopeuksien keskiarvoina.*

Tuolla menetelmällä pintanopeuksia ei tarvitse säilöä taulukoihin (ainakaan yksikertaisella suorakulmaisella hilalla, mutta tilanne lienee hankalampi yleisissä koordinaateissa), ja implementointi yksinkertaistuu. Mutta ei tämä Daten menetelmä paljoakaan poikkea Rhie & Chow'sta, oikeastaan vain "multidimensional averaging" ja "painekorjauksen splittaus" on uutta. *Date'n yksi taka-ajatus lienee, että keskeisdifferenssijatkuvuus toteutuu, kun painekorjauksesta suodatetaan lopuksi vaimennus pois.*

Date'n *karteesiset* testilaskut on esitetty epämääräisesti. Konvektion kuvaukseen on käytetty *ensimmäisen kertaluvun upwindausta, HYBRID'iä ja power law diskretointeja.* HYBRID ja power law diskretoinnit tunnetaan parhaiten Patankarin kirjasta [11]. Edellinen käyttää konvektion kuvaukseen keskeisdifferenssiä, kun solun Pecletin luku Pe on alle 2, tai ensimmäisen kertaluvun upwindausta ($Pe > 2$), ja jälkimmäinen kuvaa 1D konvektio-diffuusio yhtälön analyyttistä ratkaisua viidennen potenssin avulla. Painekorjausmenetelmä on *SIMPLE-tyyppinen.* Paine ekstrapoloidaan alueesta sen seinille. Reunaehdoista todetaan, että "The codes handle the inflow, wall, exit and symmetry bc's in a generalized manner", mitä tarkoittaneekaan? *Liikemääräyhtälöitä ja painetta alirelaksoidaan.*

2.3 Han [3]

Han'in paperi on erittäin selkeä ja helppolukuinen verrattuna Date'n epäselviin esityksiin. Han ei väännä väenväkisin hienoja merkintöjä mitättömistä asioista.

Han'in ratkaisija perustuu kontrollitilavuus-menetelmään. Hän käyttää limittämätöntä hilaa. *Jatkuvuusyhtälö on kirjoitettu kontravarianteille nopeuksille ja liikemääryhtälöissä muuttujina ovat karteesiset nopeudet. Yleisiä käyräviivaisia koordinaatteja käytetään. Pintanopeuksien arvot lasketaan keskiarvoina pinnan viereisistä soluarvoista. Konvektio ja diffuusio lasketaan keskeisdifferenssinä*, ja konvektiota joudutaan siten alirelaksoimaan [3]:(8a)-(8b) (upwind inertia flux scheme). Keskeisdifferenssillä mallinnetun konvektion oskilloinnit torjutaan lisäämällä "sopivasti" keinotekoista viskositeettia: "an implicit form of the second-order dissipation term [18]", ja tuo viittaus on Liu et al. (1983): kokoonpuristuva ratkaisija + shokki-aalto.

Han laskee kokoonpuristumatonta virtausta PISO-painekorjausmenetelmällä. PISO on 2-vaiheinen painekorjausmenetelmä, jossa ensimmäinen vaihe on samanlainen kuin SIMPLEssä [3]:(14) ja toisessa vaiheessa [3]:(15) korjataan ensimmäisen vaiheen painekorjausta liikemääräyhtälöiden avulla. Han toteaa, että painekorjausyhtälön laskenta on selvästi aikaavievin vaihe, ja siten nopea Poisson-ratkaisija on tärkeä. Han laskee Poisson-yhtälön konjugaatti-gradientti-menetelmällä (conjugate-gradient = CG), joka on hänen vertailun mukaan nopein tapa verrattuna ADI:in (alternating direction implicit) tai Stone'n menetelmään (Stone's strongly implicit method). Lisäksi CG:ssa ei tarvitse käyttää tapauskohtaisia parametrejä, ja CG vektoroituu hyvin.

Massabalanssissa [3]:(14) Han käyttää vaimenninta (4th order pressure dissipation term) paineoskillointien välttämiseksi. Vaimennin on Rhie & Chow-termi, jossa *vaimennuksen suuruutta säädellään kertoimella C*, kuten Johansson ja Davidson'in myöhemmin tekevät [4]. Edelleen Han kertoo, että arvoilla $0.1 < C < 0.5$ ratkaisu ei riipuisi vaimentimesta. Nuo arvot lienevät jotkin ylärajat.

Testilaskuissa on käytetty ns. Ahmed's body tapausta. Testilaskujen kommenteissa Han paneutuu turbulenssin kuvauksen oikeellisuuteen.

2.4 Thiart [8] ja [9]

Ensimmäisessä artikkelissaan Thiart [8] esittelee menetelmänsä. Pintanopeudet lasketaan integroimalla liikemääräyhtälöt limitetyn hilan ylitse ja sijoittamalla saatuun yhtälöön solujen arvoja interpolanttien muodossa. Varsinkin poikittaissuunnan termeistä tulee pitkiä lausekkeita (mm. x-liikemääräyhtälössä y-suunnan vuotermeissä esiintyy x-suunnan upwind'austa nurkkapisteillä). Menettely on jo tuollaisenaan kömpelö, mutta vielä lisäksi Thiart käyttää Spalding'in [10] eksponentiaali-diskretointia, joka muistetaan parhaiten Patankar'in klassikosta [11].

Liikemääräyhtälön lähdetermit, mukaanlukien painegradientit, Thiart upwind'aa päinvastoin kuin Reggio [12], joka downwind'aa paineen. Konvektio-diffuusioyhtälön diskretointi hoidetaan Spalding'in eksponentiaali-mallilla. Relaksointia Thiart ei käytä.

Keksinnöt eivät suinkaan loppuneet vielä tähän. Tavallista SIMPLE algoritmiään Thiart alkaa kutsua nimellä SIMPLEN (SIMPLE Nonstaggered) soveltaessaan sitä limittämättömään hilaan.

Artikkelinsa keskustelevassa osassa Thiart viittaa limitetyn solun liikemääräyhtälöön ja esittää pintanopeuden riippuvan luonnollisesti paineesta. Thiart esittää menetelmänsä olevan oikea *momentum interpolation method* perustuen fysiikkaan. Rhie & Chow'n menetelmä vain muistuttaa liikemäärä-interpolointia. Mutta miksi käyttää Thiart'in menetelmää, kun se vain monimutkaistaa lausekkeita. Toisaalta liikemääräyhtälöissä ei esiinny relaksointia, ei se myöskään voi pilata ratkaisua, kuten Majumdar pelottelee [13].

Toisessa paperissaan [9] Thiart monimutkaistaa konvektio-diffuusioyhtälön diskretoin-

tia, ja käyttää Wong'in ja Raithby'n LOADS'ia (locally analytic differencing scheme). Diskretointi muistuttaa Spalding'in [10] menetelmää. Noita analyyttiseen ratkaisuun perustuvia menetelmiä ei ole enää artikkeleissa paljoakaan näkynyt. Pintanopeudet lasketaan Thiart'in edellisen artikkelin menetelmällä, eli limitetyn kopin liikemääräyhtälöstä käyttäen kuitenkin tämän artikkelin uutta konvektio-diffuusioyhtälön diskretointia.

Thiart'in ehdotus on kömpelö. Testilaskut on laskettu *karteesisilla hiloilla.*

2.5 Melaaen [14], [15]

Näiden kahden artikkelin ajatuksena on vertailla limitetyn ja limittämättömän hilan ratkaisijoita keskenään: ensimmäisessä artikkelissa esitetään menetelmät ja toisessa lasketaan esimerkkejä.

Yleisiin *käyräviivaisiin koordinaatteihin* kirjoitettu kontrollitilavuuspohjainen limittämättömän hilan ratkaisija (CVM) käyttää *liikeyhtälöissä muuttujina karteesisia nopeuksia ja jatkuvuus on kirjoitettu kontravariantein nopeuksin. Pintanopeudet lasketaan Rhie & Chow interpolointina.* Konvektio kuvataan *power law'lla tai toisen kertaluvun upwindauksella.* Painekorjauksen jälkeen *pintanopeuksia korjataan suoraan* ilman soluarvoja.

Testilaskentaan (laminaarisia) perustuen esitetään seuraavat (itsestään) selvät johtopäätökset:

> 1) toisen kertaluvun upwindaus on tarkempi kuin power law, mutta vaatii enemmän CPU-aikaa.
> 2) limittämätön hila on parempi kuin limitetty, koska yleisiä koordinaatteja käytettäessä limitetyssä joudutaan interpoloimaan paljon, limittämättömässä tarvitaan vain yhtä koordinaatistoa.

2.6 Kobayashi & Pereira [7]

Heidän artikkelinsa tarkoitus on

> 1) implementoida SIMPLE asianmukaisesti
> 2) tutkia liikemääräyhtälössä käytetyn alirelaksoinnin vaikutusta limittämättömään yleisten koordinaattien PWIM:iin

Yleiset käyräviivaiset koordinaatit on valittu. Liikemääräyhtälöissä muuttujina ovat karteesiset nopeuskomponentit ja jatkuvuusyhtälö on kirjoitettu kontravarianteilla nopeuksilla. Pintanopeus lasketaan Peric'in väitöskirjaan nojautuen MWIM:iä (Momen-

tum-Weighted Interpolation Method). Peric'in kaavaa on muokattu siten, ettei liikemääräyhtälössä käytetty alirelaksointi näy lopputuloksessa. Jos alirelaksointia ei esiintyisi, käytetty kaava olisi (3).

Kirjoittajien kehittämä *"uusi" painekorjausmenetelmä, SIMPLES (S=?), on SIMPLE*, jossa on käytetty heidän esittämää pintanopeuden laskentakaavaa [7]:(20). Kirjoittajat erehtyvät kuvaamaan menetelmäänsä predictor-corrector-tyyppiseksi. Heidän käsityksensä predictor'ista on liikemääräyhtälöiden ratkaisu arvatulla paineella ja corrector'ista painekorjauksen selvittäminen. *Kontravariantit pintanopeudet korjataan suoraan*, eikä soluarvojen kautta.

Konvektio on kuvattu *HYBRID*:llä, vaikka paperi on kirjoitettu vuonna 1991.

Laminaaristen testilaskujen perusteella (cavity flow, äkillisesti kavennettu putkivirtaus Re=196, luonnollinen konvektio epäkeskisestä sylinteristä Ra=48'600, virtaus sylinterinpuolikkaan ympärillä Re=20) kirjoittajat päättelevät:

1) menetelmä takaa massan säilymisen, hyvän konvergenssin ja oskilloimattoman paineen
2) menetelmällä vältetään alirelasoinnin vaikutus lopputulokseen
3) menetelmällä voidaan laskea lämmönsiirtoakin sisältäviä virtauksia monimutkaisilla geometrioilla

2.7 Aksoy ja Chen, [16]

Aksoy ja Chen esittelevät uuden MWIM-menetelmänsä, jossa pintanopeudet lasketaan eksplisiittisesti limitettyyn hilaan kirjoitetusta liikemääräyhtälöstä, jonka kertoimet interpoloidaan limittämättömien koppien kertoimista keskeisdifferenssinä. Painekorjauksen jälkeen pintanopeudet korjataan suoraan, eikä niitä siis lasketa korjattujen soluarvojen avulla.

Rhie & Chow'sta he käyttävät nimitystä PWIM (pressure weighted interpolation method). Hieman kummallista on, että he esittävät Peric'in väitöskirjassaan esittämän pintanopeuden laskentamenetelmän, jos se on sitä mitä Date [5] sen väittää olevan eli kaava (3), PWIM:in yhteydessä. Peric'hän interpoloi limitettyyn hilaan kirjoitettua liikemääräyhtälöä viereisten solujen liikemääräyhtälöiden termeillä. Peric'in menetelmä poikkeaa Aksoy'n ja Chen'in MWIM:stä siten, että Peric interpoloi limitetyn liikemääräyhtälön naapuripisteiden summatermin yhtenä terminä kun taas Aksoy ja Chen interpoloivat sen komponentti komponentilta. Menetelmän uutuusarvo on hieman kyseenalainen.

Kolmantena limittämättömän hilan menetelmänä Aksoy ja Chen esittelevät PPEM:n (Poisson pressure equation method), [17] ja [18]. Menetelmän ideana on derivoida x-liikemääräyhtälö x:n suhteen ja y-liikemääräyhtälö y:n suhteen ja laskea lausekkeet yhteen, jolloin saadaan paineelle Poisson-yhtälö. Yhtälöstä pudotetaan vielä viskoosit termit pois (diffuusiolla lienee vähäinen vaikutus jatkuvuuteen, joka on konvektiota). Yksinkertaistetun (uuden ajanhetken jatkuvuustermi tiputettu pois, sillä massabalanssi toteutuu jollakin tarkkudella) aikariippuvan termin tarkoitus on hoitaa epälineaarisuudesta johtuvaa epästabiilisuutta, jonka yhteydessä viittaus Harlow & Welch [19]. Aksoy'n ja Chen'in näyttämä "Abdallah-menetelmä vaikuttaa samanlaiselta kuin Harlow & Welch'in esittämä menetelmä, mutta toteutettu limittämättömässä hilassa. Diskretointi suoritetaan FA-menetelmällä. Saatu paineyhtälö ratkaistaan käyttäen nopeuksina liikemääräyhtälöiden tuloksia eksplisiittisesti.

Painekorjauksen reunaehtona käytetään $\partial p'/\partial n = 0$, ellei jollakin reunalla tunneta painetta, jolloin luonnollisesti käytetään ehtoa $p' = 0$. Liikemääräyhtälöt on diskretoitu Chen'in esittämällä "finite analytic" menetelmällä (FA), jota on esitelty tarkemmin teoksessa [20]. Koordinaatisto on karteesinen.

Limittämättömät MWIM ja PWIM toimivat samankaltaisesti kaikissa "Cavity flow" testi-tapauksissa. Tulosta saattoi odottaa, sillä MWIM on välivaihe PWIM:n johdossa.

2.8 Parameswaran, Srinivasan & Sun [21]

Kertovat johdannossa, etta aikariippuvan termin lisääminen limittämättömän hilan Rhie & Chow pintanopeuden lausekkeeseen, ja siten edelleen painekorjaukseen, aiheuttaisi aika-askeleesta riippuvan stationäärisen tilan ratkaisun, viittaaavat keskusteluun B.A. Younis'in kanssa, joka sen löysi. *Yleisiä käyräviivaisia koordinaatteja* käytetään. Tässä artikkelissa on käytetty *muuttujina karteesisia nopeuskomponentteja ja faceillä paikallisen koordinaatiston suuntaisia nopeuksia (kovariantteja), joiden avulla kontravariantti massavuo lasketaan.* Pintanopeudet lasketaan eksplisiittisesti limitetyn hilan liikemääräyhtälöistä ja tarvittavat kertoimet interpoloidaan. *Mielenkiintoista pintanopeuden lausekkeessa on epästationäärinen termi.* Kirjoittajat mainitsivat johdannossa, etta tulos voi riippua aika-askeleesta. Tässä paperissa epästationäärin termin vaikutus on eliminoitu "alirelaksoimalla" pintanopeutta yhtälön [21]:(13) oikealla puolella termillä

$$0.5\rho\frac{VOL_P + VOL_E}{\Delta t}U_e^n \tag{5}$$

joka luonnollisesti kumoutuu konvergoituneessa ratkaisussa yhtälön oikean puolen aikariippuvan termin kanssa. Muiden kirjoittajien artikkeleissa pintanopeuden lausekkeessa ei ole esiintynyt aikariippuvaa termiä.

Toinen mahdollisesti poikkeava, tai epäselvä, seikka löytyy ratkaisu-proseduurista. Ratkaisu-algoritmin yhteydessä viitataan Issa'n paperiin (PISO), mutta myöhemmin puhutaan modifioidusta SIMPLE-algoritmistä. Se on seuraavanlainen.

1) Ratkaistaan liikemääräyhtälöistä nopeudet arvatun paineen avulla
2) lasketaan kovariantit nopeudet seinillä (limitetyt kopit), joista lasketaan kontravariantit vuot.
3) ratkaistaan painekorjausyhtälö
4) Lasketaan korjattu solu-nopeuskenttä liikemääräyhtälöstä [21]:(12) käyttäen korjattua painetta
5) Seuraavaksi päivitetään solunopeuskentän kertoimet $AU(u)$ ja $AV(v)$, minkä jälkeen lasketaan paikallisten koordinaattien suuntaiset pintanopeudet U_e, V_e, etc. kaavoilla [21]:(13) ja [21]:(14). Solu-nopeuskentän kertoimia tarvitaan limitettyjen kertoimien interpolointiin kaavoissa [21]:(13) ja [21]:(14).
6) Ed. kohdan nopeuksien U_e, V_e, etc. avulla lasketaan solujen massavuot F_e, F_s,... [21]:(15) ja massabalanssit.
7) Ratkaistaan painekorjausyhtälö [21]:(18) ja päivitetään paine, ja palataan kohtaan 4.

Eli liikemääräyhtälöiden kertoimet päivitetään ennen pintanopeuden laskentaa (tavallisesti päivitetään paine- ja nopeuskorjausten jälkeen ennen solujen liikemääräyhtälöiden ratkaisua), ja tavanomaista painekorjausyhtälön ratkaisun jälkeistä nopeuskorjausta ei tehdä lainkaan. Laskenta toiminee, vaikka "kertoimet" eivät toteutakaan jatkuvuutta vaan sen sijaan toteuttavat liikemääräyhtälöt. Algoritmin osalta viitataan Issan paperiin (PISO), joka on 2-vaiheinen painekorjausmenetelmä, mitä edellinen ei ole! Proseduurin tiivistelmän perusteella menetelmä on siis modifioitu SIMPLE, jossa kertoimet päivitetään tavanomaisesta poiketen liikemääräyhtälöiden ratkaisemisen jälkeen. Jotain epäselvää esityksessä kuitenkin on.

Testilasku "virtaus 2D-auton ympärillä, VW Auto 2000". Päätelmissä kehoitetaan käytämään RS-malleja k-ϵ-mallin sijasta.

2.9 Acharya & Moukalled, [22]

Artikkelin päämääränä on kokeilla Rhie & Chow interpolointia SIMPLER:in [11] kanssa ja verrata tuloksia tavanomaiseen SIMPLE:en, sekä kehittää uusi painekorjausmenetelmä (SIMPLE-modified) SIMPLER:in ja SIMPLE:n pohjalta. Johdannon lopussa kirjoittajat ylistävät painekorjausmenetelmänsä poistavan paineen oskilloinnit, ja olevan ylivoimainen muihin em. menetelmiin verrattuna.

Yhtälöt on kirjoitettu *käyräviivaiseen koordinaatistoon*. Liikemääräyhtälöiden *muuttujina ovat karteesiset nopeuskomponentit*, mutta testilaskut on käytännössä laskettu ortogonaalisissa hiloissa. Pintanopeuksina käytetään *kontravariantteja* komponentteja.

1) pintanopeudet lasketaan Rhie & Chow interpolointina. SIMPLE-versio on tavallinen, jossa uudet paineet ja solu-nopeudet sekä *pintanopeudet lasketaan suoraan painekorjauksen avulla*, ei siis korjattujen solunopeuksien avulla.

2) SIMPLER-versio on Patankarilta lainattu, ja siinä käytetään Rhie & Chow interpo-

lointia pintanopeuksien laskentaan ennen painekorjausyhtälöä. Nykyisin SIMPLERiä ei juurikaan käytetä, joten annetaan sen olla. Jos SIMPLER'ssä olisi jotain erinomaisia yleisominaisuuksia, olisi niiden pitänyt tulla ilmi 20 vuoden aikana.

3) SIMPLEM algoritmi on SIMPLER:in riisuttu versio. Se on muotoa

i) arvataan nopeudet u^* ja v^*.
ii) ratkaistaan liikemääräyhtälöistä $\mathbf{u}$ ja $\mathbf{v}$, joista lasketaan solujen kontravariantit nopeudet $\mathbf{G}_1$ [22]:(41) ja $\mathbf{G}_2$ [22]:(42), joista *lineaarisesti interpoloiden lasketaan pintanopeuksien arvot* $\mathbf{G}_1$ ja $\mathbf{G}_2$.
iii) lasketaan paineyhtälöstä (liikemääräyht. jatkuvuuteen ja paine tuntematon) uusi paine.
iv) lasketaan massavuot G_1 ja G_2 "liikemääräyhtälöistä" [22]:(39) ja [22]:(40) vaikuttaa käytännössä Rhie & Chow'n kaltaiselta interpolaatiolta.
v) ratkaistaan liikemääräyhtälöt käyttäen uusia vuo-arvoja ja painetta.
vi) palataan edellisen kohdan nopeuksien u ja v kanssa kohtaan (ii)

eli jatkuvuusyhtälön massavuot lasketaan lineaarisesti interpoloiden, eikä liikemääräinterpolointina. SIMPLEM-algoritmi on kuin Harlow & Welch'in esittämä menetelmä muutettuna limittämättömään hilaan ja stationääriseen muotoon. Kirjoittajat toteavat, että kontravariantit pintanopeudet tulee laskea jatkuvuuteen nojautuen. Testilaskut osoittavat, *että pintanopeuden päivitys liikemääräyhtälöiden perusteella hidastaa SIMPLEM:n konvergenssiä!*

Kirjoittajat toteavat, että cavity flow:ssa voidaan saada oskilloimaton tulos pelkillä keskeisdifferensseillä ja limittämättömällä hilalla. Samaan on päädytty myös Sovelletun termodynamiikan laboratorion CFD-ryhmän testilaskuissa. Mutta edelleen kirjoittajat toteavat, että "sudden expansion flow" oskilloi varmasti pelkillä keskeisdifferensseillä.

Kirjoittajat esittävät, ettei Rhie & Chow interpolointia käyttäen jatkuvuus toteudu "tarkasti" vaan "approksimatiivisesti" johtuen toisen kertaluvun ylimääräisistä termeistä.

SIMPLER'in ongelmaksi kirjoittajat toteavat kahden toisistaan poikkeavan jatkuvuusyhtälön käytön: painekorjausyhtälön (s.141 kohta 3) ja paineyhtälön (s.141 kohta 8) jatkuvuudet ovat erilaisia. SIMPLE'n ongelma on korjaustermit (Rhie & Chow interpoloinnin painegradienttien erotus), jotka hidastavat konvergoitumista. Sen sijaan SIMPLEM:ssä jatkuvuusyhtälöä käytetään vain paineyhtälön muodostamiseen, jossa ei käytetä Rhie & Chow interpoloinnin kaltaisia "korjauksia". Liikemääräyhtälöiden kertoimien pintanopeuksille [kohta (iv) tai kohta 5 s. 142] käytetään myöhemmin eksplisiittisiä liikemääräyhtälöitä [22]:(39) ja [22]:(40). Lausekkeiden [22]:(39) ja [22]:(40) ohella myös Rhie & Chow'n korjaustermein varustetut pintanopeuden lausekkeet ovat alunperin eksplisiittisiä liikemääräyhtälöitä! Kirjoittajat täsmentävät, että liikemääräyhtälöiden kertoimia varten pintanopeuksien laskentaan käytetään Δx ja Δy mittaisia painegradientti-approksimaatioita. Tällöin on käytännössä pitänyt kirjoittaa pintanopeudelle "limitetyn kopin liikemääräyhtälö", jolloin on approksimoitava termejä kuten tehdään Rhie & Chow interpoloinnissa, mitä artikkelissa ei mitenkään tarkenneta.

Konvektio on kuvattu Patankarin *power law'lla.*

2.10 Reggio & Camarero [12]

Acharya & Moukalled kirjoittivat:"Reggio and Camarero used an overlapping nonstaggered grid with forward and backward differencing for mass and pressure gradients, respectively, and the SIMPLE algorithm was used in the calculations", mikä pitää paikkansa. Reggio'n ja Camarero'n ehdotus on yksi omalaatuisimmista. Hila on limittämätön, mutta solujen rajat omalaatuisia: virtausta vastaan poikittaisessa suunnassa solu on $2\Delta y$ leveä, mutta virtaussunnassa solun pituus on tavanomaiset Δx. Lisäksi y-suunnassa solut ovat osittain toistensa päällä matkan Δy, mikä käytännössä ajaa *limityksen ideaa. Tämän menettelyn ansiosta y-suunnan pintanopeudet ovat suoraan soluarvoja, pintapaineet lasketaan yksinkertaisina keskiarvoina. x-suunnassa, jossa vierekkäiset solut eivät ole päällekkäisiä, pintanopeudet upwindataan ja pintapaineet downwindataan*, jolloin paineen oskilloinnilta vältytään. Tätä menettelyä on kirjoittajien mukaan käytetty kokoonpuristuvan virtauksen ratkaisijoissa, ja viittaavat 1970-luvun ja 1980-luvun alun artikkeleihin.

Artikkelissa on esitetty lyhyt mutta ytimekäs kannaotto yleisten koordinaattien yhteydessä tehtävästä muuttujien valinnasta. Liikemääräyhtälöissä muuttujina kannattaa pitää karteesisia nopeuskomponentteja, koska tällöin yhtälöt ovat säilymismuodossa. Artikkelissa on valittu *käyräviivaiset koordinaatit. Liikemääräyhtälöissä muuttujina ovat karteesiset nopeuskomponentit ja jatkuvuusyhtälössä esiintyy kontravariantit nopeudet*, kuten suositellaan.

Itse ratkaisija on eksplisiittinen, ja SIMPLEen perustuva painekorjausyhtälökin (viittaus myös MAC-menetelmään) ratkaistaan ymmärtääkseni eksplisiittisesti. *Pintanopeutta korjataan suoraan.*

Esimerkkitapaukset ovat alhaisen Re:n luvun kanavavirtauksia ($Re \approx 100$), joissa päävirtaussuunta on selkeä. Kaksi suuremman Re-luvun virtausta (NACA cascade tests) esitellään, mutta edelleen päävirtaussuunta on selkeä. Olisi mielenkiintoista nähdä kuinka menetelmä toimii, jos virtauksessa esiintyy päävirtausnopeuteen nähden voimakkaita pyörteitä.

2.11 Peric, Kessler ja Scheuerer, [23]

Artikkeli vertailee limitetyn ja limittämättömän hilan ratkaisijoita esimerkkien avulla. Tapaukset ovat *lid driven cavity flow*, *backward facing step flow* ja *pipe flow with sudden contraction.* Peric kertoo, että kolme ensimmäistä limittämättömän hilan ratkaisijat on esitelty vuonna 1981 väitöskirjoina: Hsu, Prakash ja Rhie. Peric toteaa, että limittämättömän hilan käyttöönottoa on viivästyttänyt noiden kolmen työ huono levikki ja vaikutusvaltainen "vastustus", Patankar [11]. Tunnetuimmista kaupallisista ohjelmista FLOW3D (nykyisin CFX) on julkaissut jo 1986 artikkelin liittyen limittämättömään hilaan, ja FLOW3D lieneekin ensimmäinen kaupallinen ratkaisija, joka on soveltanut menetelmää. Limittämättömän hilan eduista limitettyyn verrattuna Peric esittää

1) vain yksi hila käytössä,
2) konvektion kontribuutio kaikissa yhtälöissä sama,
3) nopeudet voidaan esittää karteesisin komponentein myös monimutkaisissa tapauksissa eikä siis paikallisiin koordinaateihin sidottuja nopeuksia tarvitse käyttää,
4) laskentahilan rajoituksia on vähemmän, koska ei tarvitse tarkastella ns. "curvature terms".
5) Lisäksi tekstissä mainitaan myöhemmin etuna multigridin helpompi implementointi.

Esimerkeissä tarvittavat *hilat ovat ortogonaalisia.* Limittämättömän hilan ratkaisija on tavanomainen. *Pintanopeudet lasketaan limitetyn kopin liikemääräyhtälöstä* eksplisiittisesti interpoloimalla naapuripisteiden summatermit vierekkäisistä kopeista (voidaan puhua MWIM:stä, mitä myös Rhie & Chow interpolointi viime kädessä on), jolloin vain yksi painegradienttitermi esiintyy [23]:(13). Peric toteaakin, että menettely on eräänlainen "epäsuora limitys". Pintanopeudet ovat kaikille yhtälöille samat. *Konvektio kuvattu ensimmäisen kertaluvun upwindillä.* Liikemääräyhtälöiden pintapaineet lasketaan lineaarisesti interpoloiden ja jatkuvuusyhtälön painegradientti tavanomaisesti vierekkäisten koppien arvoista. *Painekorjausmenetelmä on SIMPLE. Nopeudet, massavuot ja paineet korjataan sellaisenaan.*

Kaikki yhtälöt ratkaistaan SIP:llä. Liikemäärälle käytetään yhtä sweepiä. Jatkuvuudelle käytetään max. 6 sweepiä ja lisäksi rajoitteena

$$\frac{(\sum abs.residual)_{kys.sweep}}{(\sum abs.residual)_{1.sweep}} < 0.2$$

Peric'in reunojen käsittely on hieman kummallinen/monimutkainen.

Lid driven cavity flow on laskettu Re-luvulla 100 ja kolmella tasajakoisella hilalla: 16x16, 32x32 ja 64x64. Kaikkien muuttujien alkuarvaus oli nolla. Limitetyn ja limittämättömän hilan tulokset ovat käytännössä samat, 0.1 % poikkeamaa esiintyy ylänurkissa. Konvergoitumisnopeudetkin ovat samaa luokkaa. Optimaalinen relaksointi $\alpha_v \approx 0.8$ ja $\alpha_p \approx 0.3$. Mahdollisimman suuren α_v:n valinta on tärkeintä ja $\alpha_p \approx 0.3$.

Backward facing step flow Re=100. Päätelmät samat kuin edellä.

Pipe flow with sudden contraction, Re=372. Relaksoinnin päätelmät kvalitatiivisesti kuten edellä, mutta limittämättömässä hilassa konvergenssi nopeampaa ja optimaalinen alue vähän laajempi. Päätelmät muuten kuten edellä.

Johtopäätökset: Optimaaliset relaksointi-parametrit olivat samanlaiset molemmilla hilatyypeillä: $\alpha_v \approx 0.9$ ja vastaava paineen kerroin $\alpha_p \approx 0.3$. Laskenta-ajat olivat esimerkkitapauksissa melkein samat, joskin limittämätön konvergoitui vähän nopeammin kahdessa ensimmäisessä testitapauksessa ja ero kasvoi kolmannessa. Laskentatulokset olivat käytännössä samat molemmilla hilatyypeillä. $\Rightarrow$ Peric suosittelee limittämätöntä hilaa.

2.12 Lapworth [24]

Lapworth hakee menetelmää, jolla paineen oskillointi voidaan välttää. *Hän on törmännyt oskillointiin limitetyssäkin hilassa käyttäessään periodisia reunaehtoja 2D siipisolissa.* Oskillointi syntyy reunojen periodisten puolikoppien takia. Testilaskennan pohjalta Lapworth käyttää vain *tavallista Rhie & Chow interpolointia*, jolla oskilloinneilta vältyttiin (kokeili myös jotain Vanka et al. menetelmää vuodelta 1980). Mielenkiintoinen yksityiskohta on painekorjausyhtälö, joka on oikeastaan kirjoitettu suoraan paineelle, jolloin periodisten reunaehtojen käsittely olisi helpompaa. Käytetty menetelmä on kuitenkin *käytännössä SIMPLE.* Menetelmäänsä Lapworth kutsuu "modified Rhie & Chow", joka viitannee em. muutokseen.

Yleisiä *käyräviivaisia koordinaatteja* käytetään, liikemääräyhtälöissä ovat *muuttujina karteesiset nopeuskomponentit* ja jatkuvuusyhtälö kirjoitettu *kontravarianteille* komponenteille. Konvektio on kuvattu *ensimmäisen kertaluvun upwindilla.*

2.13 Majumdar [13]

Majumdar teki havainnon, että Rhie & Chow interpoloinita käytettäessä tulos voi riippua nopeuden relaksoinnista. Tässä artikkelissa kirjoittaja esittää lääkettä kyseiseen ongelmaan. Ongelma piilee siinä, että jotkut ovat nopeuden alirelaksoinnilla saaneetkin edellisen iteraatiokierroksen pintanopeudeksi soluarvojen keskiarvon. Tämän Majumdar on esittänyt kaavana [13]:(8), jossa pintanopeuden lausekkeeseen sijoitetaan relaksoidut liikemääräyhtälöt, jolloin edellisen kierroksen pintanopeudeksi tulee tosiaan vanhojen soluarvojen keskiarvo. Lääkkeeksi Majumdar esittää, että pintanopeuksia tulee relaksoida suoraan edellisen kierroksen pintanopeudella [13]:(9), eikä edellisen iteraation soluarvojen keskiarvoilla.

2.14 Jang, Jetli ja Acharya [25]

Kirjoittajat ovat vertailleet PISO-, SIMPLER- ja SIMPLEC-painekorjaus menetelmiä stationääristen virtausten laskennassa. Päätelmässä todetaan, että PISO (predictor-corrector tyyppinen painekorjausmenetelmä, joka selitetty artikkelissa) on paras tapauksissa, joissa skalaari-muuttujat eivät esiinny liikemääräyhtälöissä. *Kun skalaarien vaikutus liikemääräyhtälöihin on voimakas, esimerkiksi lämmön ajamissa virtauksissa,* *on SIMPLE-pohjaiset SIMPLER ja SIMPLEC parhaimpia.* SIMPLER:iä ja SIMPLEC:tä ei testien pohjalta voi laittaa paremmuusjärjestykseen. Paperi on ensimmäinen em. painekorjaus menetelmien välinen vertailu. Kirjoittajat ovat käyttäneet *limitettyä karteesista hilaa.*

2.15 Shih ja Ren [26]

Kirjoittajat vertailevat kolmea limittämättömän hilan ratkaisumenetelmää. Ensimmäinen menetelmä ratkaisee kaikki yhtälöt yhdellä kertaa, jolloin ongelmana on matriisin diagonaalialkioiden "keveys". Toisessa menetelmässä he kehittävät paineelle Poisson-yhtälön derivoimalla x-liikemäärän x:n suhteen ja y-liikemäärän y:n suhteen ja laskemalla saadut yhtälöt yhteen. Jatkuvuuden huono toteutuminen on kuitenkin ongelma. Kolmannessa menetelmässä paineelle kehitetään yhtälö sijoittamalla liikemääräyhtälöt jatkuvuusyhtälöön.

Kirjoittajat esittävät mielenkkintoisen vinkin: laskentapisteiden määrän tulee olla parillinen heidän käyttämässään cell-vertex tyyppisessä hilassa. Tällöin laskenta-alueen kaikki pisteet riippuvat reunaehdoista, eikä paineen oskillointia esiinny. Kirjoittajat käyttävät kaikkialla keskeisdifferenssejä $\Rightarrow$ painegradientti Δx-formulalla. Sen sijaan jos laskentapisteiden määrä on pariton, esiintyy paineessa oskillointia, sillä osalla pisteistä ei ole suoraa kontaktia reunaehtoihin.

Pintanopeudesta tai muista limittämättömän hilan yksityiskohdista ei puhuta mitään. Artikkeli on kaikin puolin puuduttava.

2.16 Wu ja Rath [27]

Kirjoittajat laskevat vapaan pinnan virtausta. Liikemääräyhtälöissä esiintyy pyörimisliikkeestä johtuvia *body force*-termejä. He käyttävät tavallista Rhie & Chow interpolointia ilman Gu'n (1991) esittämiä *higher-order body-force-damping*-termejä. Niitä ei tarvita, kun reuna-paineet lasketaan paikallisista massa-yhtälöistä, jolloin epäfysikaalista nopeusjakaumaa ei esiinny.

Käyräviivaisia koordinaatteja käytetään, liikemääräyhtälöissä muuttujina esiintyvät *karteesiset nopeuskomponentit* ja jatkuvuusyhtälö on kirjoitettu *kontravarianteille komponenteille.* Konvektio on kuvattu *power law*'lla. Painekorjaumenetelmää käytetään. Pintanopeudet päivitetään suoraan ilman soluarvoja.

2.17 Jessee ja Fiveland [28]

Ratkaisija on *nykyaikainen. Konvektio kuvataan korkeamman asteen menetelmillä*, limittereitä käytetään, konveroitumisnopeutta parannetaan paikallisella aika-askeleella, ja itse *ratkaisija perustuu algebralliseen multigridiin*. Pintanopeudet lasketaan *Rhie & Chow interpolointia* käyttäen, ja sitä on modifioitu riippumattomaksi relaksoinnista ja aika-askeleesta. Käytännössä se on hoidettu Majumdar'in paperin [13] pohjalta, ja viittaus rakenteettoman hilan Rhie & Chow interpolointiin osuu Prakash & Patankar'in paperiin (1985) Numerical Heat Transfer lehdessä vol. 8 pp. 259-280 (kontrollitilavuuspohjainen FEM...). *Yleiset koordinaatit on esitetty normaalivektoreiden* avulla Ratkaisija on kirjoitettu muotoon, joka pystyy käsittelemään rakenteettomia hiloja.

Ratkaisijan vaiheet on esitetty sivulla 283. *Kukin yhtälö ratkaistaan erikseen*, ja *SIMPLE* painekorjausmenetelmää käytetään. Kirjoittajat mainitsevat, että pseudokompressibiliteetti-menetelmääkin voidaan ratkaisijalla käyttää, kuten myös Williams'in (1991) [29] esittämää em. menetemien yhdistelmää ja "fully coupled methods". SIMPLE (tai painekorjausmenetelmä) on valittu, koska se toteuttaa jatkuvuuden kullakin iteraatiolla ja sen muistintarve on pienempi kuin implisiittisellä "fully coupled" -menetelmällä. Painekorjausmenetelmän johdossa kirjoittajat viittaavat Hirsch'in kirjaan ja Watterson'in paperiin AIAA Paper 94-2358, 1994. Johdon idea on, että epästationäärinen liikemääräyhtälö lopultakin toteutuu, jolloin siitä vähentämällä arvatulla paineella laskettu liikemääräyhtälö saadaan nopeuden ja paineen korjaukselle yhteys

$$\rho u' = -\Delta t \frac{\partial p'}{\partial x} \tag{6}$$

Mielenkiintoista on, että Rahman'in [30] paperissa on täsmälleen sama yhteys, muttei viittausta mihinkään edellä mainittuun paperiin. Jessee ja Fiveland korjaavat paineet ja pintanopeudet sellaisenaan. Painetta alirelaksoidaan, muttei nopeutta.

Laminaareissa testilaskuissa kiinnitetään huomiota vain konvektion kuvaukseen ja limittereihin. Kirjoittajat eivät suosittele ensimmäisen kertaluvun upwindiä tai HYBRID'iä.

Päätelmissä kirjoittajat toteavat, että "The inclusion of the non-orthogonal terms in the discrete pressure Poisson equation was found to be crucial with highly non-orthogonal grids". Samaan on aiemmin päätynyt Peric [31]

2.18 Russell ja Abdallah [32]

Kirjoitajat toteavat, että Rhie & Chow interpolointi vaikuttaa jatkuvuusyhtälön tarkkuuteen (varying levels of dilation resulting from several popular methods). Kirjoittajat ehdottavat, että paineyhtälöön (liikemääräyhtälöt jatkuvuuteen, josta uusi paine lasketaan) ja liikemääräyhtälöihin sijoitetaan neljännen kertaluvun tarkat kuvaukset paineen toiselle ja ensimmäiselle derivaatalle. Tavalliselle toisen kertaluvun keskeisdifferensseillä päästään muotoon

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = \frac{p_{i+2} - 2p_i + p_{i-2}}{4\Delta x^2}$$

jossa siis paineen kytkentä viereisten koppien välillä on poikki. Kirjoittajien ehdottama korkeamman kertaluvun muoto on

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = \frac{-p_{i+3} + 8p_{i+2} + p_{i+1} - 16p_i + p_{i-1} + 8p_{i-2} - p_{i-3}}{24\Delta x^2}$$

jossa vierekkäiset kopit on kiinnitetty toisiinsa. Kirjoittajat muistuttavat, että liikemääräyhtälöiden painegradientit ja jatkuvuusyhtälön painegradientit tulee kuvata samalla tapaa, muuten "any incocsistency will result in solutions with nonzero dilation". Tämä näkyy artikkelin yhtälöstä [32]:(4), jossa jatkuvuusyhtälöön on sijoitettu liikemääräyhtälöt: mallien ero esiintyisi jatkuvuusyhtälön lähdeterminä. Näinhän on itse asiassa Rhie & Chow'ssa. Lopuksi kirjoittajat esittävät raskas-soutuisen reunaehtojen käsittelynsä: reunaehtoja kiinnitetään yhtälöiden avulla.

Esimerkkinä on laskettu cavity flow Re=1000. Menetelmä toimii siinä. Vertailu on suoritettu uuden, Abdallah'in vanhan (classical pressure Poisson) ja stream function-vorticity (Ghia et al.) menetelmän välillä. Ensimmäinen ja kolmas menevät päällekäin, ja toisen poikkeama selitetään toteamalla "nozero dilation".

Jos heidän menetelmä toimii, niin ongelmana on Poisson-yhtälön todella pitkät mallineet, jolloin tehokkaan Poisson-ratkaisijan teko näyttäisi hankalalta.

2.19 Sotiropoulos ja Abdallah [33]

Tässä paperissa kuvataan artikkelin [34] menetelmän II jatkuvuusyhtälön artificial dissipation-termin johtoa, toisin sanoen pintanopeuden lausekketta.

Käytettäessä limitettyä hilaa jatkuvuusyhtälö toteutuu konetarkasti, muttei limittämättömässä hilassa. Käytettäessä pseudokompressibiliteetti-menetelmää limittämättömässä hilassa joudutaan jatkuvuusyhtälöön lisäämään eksplisiittisesti artificial dissipation-termi paineen oskilloinnin välttämiseksi. Sama koskee paine-menetelmää. Tämän artikkelin aiheena on artificial dissipation-termin vaikutus jatkuvuusyhtälöön.

Kokoonpuristumattoman virtauksen jatkuvuusyhtälöstä kirjoittajat toteavat osuvasti: "Continuity equation is a constraint which the velocity field has to satisfy at any instant in time and not an evolution equation like x- and y-momentum". Aerodynamiikassa käytetyissä ratkaisumenetelmissä jatkuvuuyhtälöhän on tiheyden konvektioyhtälö.

Kirjoittajat valaisevat lukijoilleen hyvin paine-yhtälön formulointia. Ensiksi derivoidaan x-liikemäärä x:n ja y-liikemäärä y:n suhteen, jolloin yhteenlaskuna saadaan

$$\frac{1}{\rho}\Big(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2}\Big) = -\Big(\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y}\Big) + \frac{\partial D}{\partial t} \tag{7}$$

missä ξ ja η ovat niputettuja x- ja y-liikemääräyhtälöiden konvektio ja diffuusiotermejä, ja D on kokoonpuristumattoman virtauksen jatkuvuusyhtälö. Kehitetyssä yhtälössä (7) jatkuvuus ei välttämättä toteudu. Dilataatio-termin aikaderivaatta voidaan kirjoittaa diskreetisti

$$\frac{\partial D}{\partial t} \approx \frac{D(t+\Delta t) - D(t)}{\Delta t} \tag{8}$$

ja ajattelemalla, että uuden ajan hetken nopeuskenttä toteuttaisi jatkuvuuden, Harlow & Welch [19], se kirjoitetaan muotoon

$$\frac{\partial D}{\partial t} \approx -\frac{D(t)}{\Delta t} \tag{9}$$

Sijoittamalla approksimaatio (9) yhtälöön (7) jatkuvuus-ehto ja paine saadaan uitettua ns. paine-yhtälöön, jossa paine käsitellään implisiittisesti ja loput termit eksplisiittisesti. Siten paine-yhtälössä esiintyy lähdeterminä liikemääräyhtälöiden residuaalien summa (sillä paine voidaan ajatella sisältävän arvatun paineen p^n ja painekorjauksen p' summan $= p^{n+1}$) ja massavirhe, jota on painotettu aika-askeleen käänteisluvulla. Eli yhtälö on melkein painekorjausyhtälö, jossa nopeudet on käsitelty eksplisiittisesti.

Kirjoittajien algoritmi lienee seuraavanlainen:

1) Lasketaan liikemääräyhtälöt arvatulla/uudella paineella.
2) Ratkaistaan paineyhtälö $\Rightarrow$ uusi paine.
3) Nopeudet päivitetään sijoittamalla uudet paineet liikemääräyhtälöihin.
4) Päivitetään liikemääräyhtälöiden kertoimet.

Seuraavaksi kirjoitetaan jatkuvuusyhtälö käyttäen liikemäärä-interpolointia pintanopeuksien laskemiseksi (lopultakin Rhie & Chow'n esittämän menettelyn kaltainen). Jatkuvuusyhtälöön syntyvä lisätermi on kuin Rhie & Chow interpoloinnin dissipaatio. Kirjoittajat toteavat, että pseudokompressibiliteetti menetelmässä termi lisätään eksplisiittisesti, jotta ratkaisu stabiloituisi. Kirjoittajien esittämässä menettelyssä "termi syntyy itsestään". Lisäksi he suosittelevat tiheän hilan käyttöä alueilla, joissa painegradientit ovat voimakkaita. Muutoin lähdetermistä tulee suuri (jos paine-jakauma on lineaarinen, lisätermi on nolla!).

Seuraavaksi kirjoittajat esittelevät keskeisdifferenssin käyttöä jatkuvuusyhtälössä, josta seuraa joka toisen paineen kytkentä johtaen oskilloivaan paineeseen. Mutta seuraava veto onkin "viekas". Jatkuvuusyhtälöön laitetaan nopeuksien (joihin ekspl. liikeyht. sijoitetaan) keskiarvot, jolloin joka toinen paine on kytketty toisiinsa, ja päälle jatkuvuusyhtälöön lisätään dissipaatiotermi "hihasta" tai oikeammin aiemman johtoon perustuen. Nyt kirjoittajat esittävät, että paineyhtälön dissipaatiotermin kerroin voidaan itse valita, kuten Han [3] ja myöhemmin Johansson ja Davidson [4] tekevät suoraan Rhie & Chow interpoloinnissa. Syynä tähän kömpelöön käsittelyyn on seikka, että kirjoittajien johdossa dissipaatiotermi ei esiinny konkreettisena terminä, johon kertoimen voisi sijoittaa (MWIM:n ongelma yleensäkin). Käytännössä sekin pitäisi onnistua alkamalla interpoloida liikemäärä-termejä, kuten Rhie & Chow menetelmässä tehdään. Mutta on mielenkiintoista tietää, jos pelkän dissipaation lisääminen jatkuvuusyhtälöön poistaa oskilloinnin. Jos kerroin $\epsilon = 1$ saadaan alkuperäinen artificial dissipation-termi ja valinnalla $\epsilon = 0$ vaimentamaton menetelmä, eli valitsemalla kerroin pienemmäksi kuin 1 saadaan massayhtälö paremmin toteutumaan.

Paine-yhtälön reunaehdot johdetaan liikemääräyhtälöistä.

Laskuesimerkeissä *hilat ovat karteesisia.* Numeeriset kokeet on tehty cavity flow'lla, jonka Reynoldsin lukua kirjoittajat eivät vaivaudu esittämään. Samoin on tulosten laita. Vain 3 konvergenssi-kuvaa näytetään. Todetaan, että valinnalla $\epsilon = 0$ nopeus on tasainen, mutta paine oskilloi, kuten pitäisikin. Kun $\epsilon < 1$ dilataation virhe pienenee kertoimen pienentyessä. Sopivina arvoina kirjoittajat esittävät $\epsilon \approx 0.1$. Omissa cavity flow laskelmissani käytin pienempiäkin arvoja, mutta muissa tapauksissa jouduin sitä suurentamaan laskenta-ajan kurissa pitämiseksi. Kertoimen arvo vaikuttaa tapauskohtaiselta. Ja hilan tihentäminen pienentää dilataation virhettä, mikä on luonnollista, sillä 5 solun matkalla paine-jakauma muuttuu lineaarisemmaksi hilaa tihennettäessä. Mutta nuo laskennalliset kokeet ovat köykäisiä, ja päälle päätteeksi kirjoittajat kehtaavat kuvata cavity flow'ta vaikeaksi tapaukseksi.

Tämä artikkeli herättää jälleen kysymyksen, pitääkö nopeus interpoloida seinillä liikemäärä-yhtälöistä vai keskeisdifferenssinä ollakseen oikea. Jos dilataatiota tarkastellaan, niin keskeisdifferenssi on "oikea" mutta kun tuo virtaus myötäilee myös liikemääränkin säilymistä. Toisaalta, kun hila on riittävän tiheä, molemmat antavat saman lopputuloksen.

2.20 Sotiropoulos ja Abdallah [35]

Tässä paperissa laajennetaan edellissä artikkelissa [33] kehitettyä menetelmä (paineyhtälö kirjoitetaan soluarvoilla ja yhtälöön lisätään vaimennin) 3D yleisiin koordinaatteihin. 4-askeleen Runge-Kutta-menetelmää käytetään kirjoittajien mukaan ensimmäistä kertaa paine-yhtälön rinnalla.

Yleisiä *käyräviivaisia koordinaatteja* käytetään. Liikemääräyhtälöissä käytetään painegradienteille ja kitkatermeille keskeisdifferenssiä ja konvektiolle toisen kertaluvun upwindiä. Paineyhtälö, jossa nopeudet on kirjoitettu kontravarianteilla komoponenteilla, kirjoitetaan soluarvoilla ja yhtälöön lisätään painetta sisältävä vaimennin. Vaimentimesta kirjoittajat toteavat osuvasti, että painetta operoidaan kahden erilaisen Laplace-operaattorin erotuksella, mikä helposti nähdään Rhie & Chow'n lausekkeesta. *Vaimennin sisältää vain ortogonaaliset termit, mistä todetaan, että muut termit lisäisivät vain dilataaation virhettä.* Temppuhan on OK jo vapaasti valittavan kertoimen ($0 < \epsilon < 1$) ϵ:inkin takia. Vaimentimen kertoimia pinnoilla interpoloidaan keskeisdifferenssinä. Riittävän suurena kertoimen arvona kirjoittajat esittävät $\epsilon \approx 0.05$ paineen oskilloinnin välttämiseksi, mutta sen vaikutuksesta konvergoitumisnopeuteen ei puhuta vielä mitään. Vaimenninta ei käytetä ensimmäisessä seinän jälkeisessä solurivissä.

Paineen reunaehdot käsitellään nopeuksien ja reunan normaalin suuntaisen liikemääräyhtälön avulla. *Paineen reunoista todetaan: "Gresho and Sani (1987) proved that the Neumann boundary condition is always appropriate for the pressure-Poisson equation." Eli sama koskisi painekorjausta.* Esitys tarkoittanee sitä, että painegradientin arvo lasketaan aina nopeuksien arvoista eksplisiittisesti liikemääräyhtälöstä. Periaatteessa sen pitäisi toimia.

Algoritmi on yksinkertaistettuna seuraava:

I) lasketaan paineyhtälöstä paine,
II) käytetään uutta painetta liikemäärien laskentaan,
III) palataan kohtaan I uusien nopeuksien kanssa.

Kertoimien tai pintanopeuksien arvojen päivityksestä ei ole tarkempaa tietoa. Konvergenssi parantamiseksi käytetään CFL-perusteista paikallista aika-askelta. Lisäksi kirjoittajat käyttävät implisiittistä residuaalin tasoitusta liikemääräyhtälöissä, jonka avulla CFL:ää voitiin kasvattaa $0.7 \rightarrow 2.5$.

Laskennalliset testi on tehty 3D virtauksella laivan ympäri, "Wigley Hull". Paineyhtälön vaimentimen kerroin oli $\epsilon = 0.05$, sillä pienemmillä arvoilla laskenta "räjähti". Konvergenssin tarkatelu keskitty liikemääräyhtälöiden implisiittisten residuaalien tasoittimien tarkasteluun. Tasoitin nopeuttaa laskentaa selvästi.

2.21 Sotiropoulos, Kim ja Patel[34]

Kirjoitus on oikeastaan Sotiropouloksen edellisten artikkelien, [33] ja [35], menetelmien soveltamista. Kirjoittajat vertailevat kahta ratkaisumenetelmää laminaarisissa tapauksissa, jottei turbulenssi-mallit pilaisivat tuloksia.

Menetelmä I (paineyhtälö + MWIM)
Patel'in käyttämä menetelmä, jossa yhtälöt on kirjoitettu paikallisille kontravarianteille nopeuksille (full-transformation approach) limittämättömässä hilassa. Diskretointi hoidettu Che'in *finite-analytic*-menetelmällä, joka on ääriarvoiltaan toista kertalukua (pieni kopin Re) ja ensimmäistä kertalukua (suuri kopin Re) "juohevasti". Yhtälöt ratkotaan ADI:lla. Paine ja nopeudet linkitetään PISO:n kaltaisella menetelmällä. Paineyhtälö kirjoitetaan ottamalla käyttöön limitetyt pseudo-nopeudet, jotka lasketaan lineaarisena interpolaationa, kuten tehdään tarvittavien kertoimienkin suhteen. Menetelmä käyttää limittämätöntä hilaa. PISOssa paineen oskilloinneilta vältytään, koska paineyhtälöä kehitettäessä jatkuvuusyhtälöön sijoitetaan limitettyjen koppien liikemääräyhtälöitä, eli käytännössä kyseessä on MWIM.

Menetelmä II (paineyhtälö + MWIM)
Sotipouloksen ja Patelin kehittelemä menetelmä, jossa yhtälöt kirjoitetaan *paikalli-*

sessa koordinaatistossa karteesisille nopeuksille (partial-transformation approach) limittämättömässä hilassa. Diskretoinnissa käytetään keskeisdifferenssiä paitsi konvektiolle toisen kertaluvun upwindausta. Massayhtälössä (stat. jatkuvuusyhtälöön sijoitetaan aikariippuvat liikemääräyhtälöt) esiintyy pintanopeuksien painegradienttien erotuksesta syntyvä dissipaatiotermi. Liikeyhtälöt aika-integroidaan Runge-Kutta-menetelmällä, ja paineyhtälö ratkaistaan ADI:lla.

Menetelmien vertailussa paljastuu, että menetelmän II jatkuvuusyhtälö voidaan kirjoittaa muotoon

$$\nabla \cdot \vec{v} = -\epsilon_{II} \frac{\Delta t}{4} \left[\Delta x^2 \frac{\partial^4 p}{\partial x^4} \right] + \ldots$$

jossa esiintyy Δt, koska jatkuvuusyhtälöön sijoitetaan aikariippuvat liikemääräyhtälöt. Käytännössä $1/\Delta t$ on massavirheen painokerroin [Sotiropoulos (1991) [33]:(15)]. Haettaessa stationääristä ratkaisua paikallisella aika-askeleella $\Delta t = \Delta x \; CFL/u$, voidaan em. kirjoittaa muotoon

$$\nabla \cdot \vec{v} = -\epsilon_{II} \frac{CFL}{4u} \left[\Delta x^3 \frac{\partial^4 p}{\partial x^4} \right] + \ldots$$

eli aika-askel esiintyy tässä tapauksessa pintanopeuden liikemäärä- interpolantin lausekkeessa, ja voidaan näyttää, ettei vaimennin ($\sim \Delta x^3$) pilaa massatasetta ($\sim \Delta x^2$), josta jotkut kirjoittajat valittavat. Kerroin ϵ_{II} on "user-specified constant". Menetelmässä I esiintyy myös vaimennin, joka on saman kaltainen kuin edelliset, ja poikkeaa vain kertoimen ϵ_I osalta, joka on funktio Reynoldsin luvusta, eli johdateltu eikä "hihasta vedetty". Toisena ero kirjoittajat mainitsevat, että menetelmässä I dissipaatiotermi on johdettu, mutta menetelmässä II se vain lisätään eksplisiittisesti jatkuvuusyhtälöön. Johto on esitetty edellisessä artikkelissa, [33].

Testeissä on laskettu laminaarista virtausta käyristetyssä kanavassa kahdella erilaisella reunaehdolla käyttäen samoja hiloja, alkuehtoja, reunaehtoja ja konvergenssikriteerejä. Yleisesti ottaen menetelmä II löytää paremmin 3D virtausilmiöt, ja vastaa paremmin mitattuja tuloksia. Yksityiskohtainen analyysi poikkeamista kertoo seuraavaa:

Koordinaattien valinta. Vaikka menetelmän I koordinaatisto on tunnetusti herkempi (Christoffel'in lisätermit) hilan venytykselle ja käyryydelle, ei sen pitäisi vaikuttaa näihin tuloksiin, sillä hila ei sisällä raakaa venytystä tai käyristystä.

Diskretoitu jatkuvuusyhtälö. Kertoimet ovat suuruusluokkaa $\epsilon_I \sim 1$ ja $\epsilon_I I \sim 0.01$, minkä pitäisi näkyä tuloksissa. Kuitenkaan solujen määrän lisäys 34% ensimmäisessä menetelmässä ei vaikuttanut tuloksiin, joten voinee olettaa, ettei kerroin ϵ_I ole liian suuri.

Konvektion diskretointi. Menetelmän I ensimmäisen kertaluvun upwind suurilla kopin

Reynoldsin luvuilla aiheuttaa näennäistä diffuusiota etenkin pyörteiden alueella (gridin ja virtaviivojen välinen kulma), jolloin virtausilmiöitä hukkuu.

Päätelmissä kirjoittajat toteavat, että monimutkaisissa virtauksissa tulee numeerinen diffuusio pitää kurissa, eli konvektio on mallinnettava aidosti toisen kertaluvun menetelmällä, jolla tässä laminaarisessa tapauksessa saatiin sekundääriset virtauksen kuvattua.

Tiivistelmä. Menetelmä on eräänlainen painekorjausmenetelmä, jossa operoidaan suoraan paineella eikä korjauksella, kuten Harlow ja Welch [19] tekivät. Limittämättömän hilan massayhtälöön sijoitetaan liikemääräyhtälöiden interpolantit pinnoilla (MWIM), josta uusi paine ratkaistaan. Johto on esitetty siten, että vaimennin lisätään yhtälöön eksplisiittisesti, jolloin siihen voidaan lisätä kerroin, jolla vaimennuksen suuruutta voidaan "säädellä". Eli menettely perustuu samaan kuin Rhie & Chow interpolointi, ja vaimentimeen on lisätty säätökerroin, jonka tämän kirjallisuusselvityksen perusteella ensimmäisenä on esittänyt Han [3] ja myöhemmin soveltanut (tietämättä edellisestä?) Johansson [4].

2.22 Choi, Nam, Lee ja Cho [36]

Kirjoittajat modifioivat *Rhie & Chow interpolointia käyttämään kovariantteja nopeuksia pinnoilla*, jolloin paine- tai painekorjausyhtälö on yksinkertainen ja diagonaalipainotteinen. Nopeudet ja paineet kytketään SIMPLE:llä. Kovarianttien ja kontravarianttien pintanopeuksien käyttöön perustuvia ratkaisijoita vertaillaan.

Yleiset *käyräviivaiset* koordinaatit on valittu. Hila on limittämätön ja *karteesiset nopeuskomponentit ovat muuttujina liikemääräyhtälöissä ja kontravarianteilla nopeuksilla kirjoitettu jatkuvuusyhtälö kirjoitetaan kovarianttien nopeuksien avulla* täsmällisesti johtaen pitkään epäortogonaalisuudesta johtuvaan massalähdetermiin. Painekorjausyhtälö johdetaan kovarianteilla nopeuksilla. Painekorjauksilla korjataan karteesisia komponentteja soluissa. Voitanee päätellä, että pintanopeudet lasketaan korjattujen solunopeuksien avulla. Painetta alirelaksoidaan kuten myös nopeuksia liikemääräyhtälöissä. Konvektio on kuvattu Patankarin [11] *power law'lla.*

Testit on laskettu laminaareilla virtauksilla 3D-neliö kanavassa, 3D cavity flow'ssa ja 3D-neliö kanavan 90^o mutkassa. Ensimmäisessä tapauksessa poikkileikkauksen neliötä alettiin vääntää suunnikkaaksi. Neliössä eroja ei esiintynyt. 60^o tapauksessa kovariantti versio konvergoitui nopeammin samoilla parametreillä ja 30^o tapauksessa kontravariantilla versiolla oli konvergenssi-ongelmia, jotka korjattiin pienentämällä paineen relaksointia "standardista" $0.3 \rightarrow 0.1$. Kontravariantin version "kehno toiminta" johtuu painekorjauksen gradienttien ristikkäisderivaattojen tiputtamisesta. Jos ne pidetään mukana painekorjausyhtälöstä tulee monimutkaisempi, eli solun yhtälössä esiintyy useampia naapurikoppeja. Kovariantissa versiossa yhtälössä esiintyy minimimäärä naapurikoppeja, mutta lisäksi yhtälöön tulee taivutetun hilan "nonorthogonal mass source" termit [36]:(21), jotka voivat kaataa laskennan riittävän vinossa hilassa.

3D cavity flow raportoitu surkeasti, mutta kuitenkin todetaan "good agreement".

Mutka-kanava kuvautuu mutkan lopullakin kohtalaisen hyvin

Päätelmässä kirjoittajat toteavat, että kovarianttien nopeuksien käyttö pinnoilla parantaa menetelmän konvergenssiä vinoissa hiloissa. Miksi kovariantteja nopeuksia ei kuitenkaan käytetä yleisemmin? Yleisissäkin koordinaateissa voidaan käyttää kontravariantteja komponentteja täydellisessä muodossa käsittelemällä osa soluista implisiittisesti ja osa eksplisiittisesti, mikä johtaa pitkään lähdetermiin kuten kovariantteja komponentteja käytettäessä. Ei luulisi valinnalla olevan suurtakaan merkitystä. Artikkelin tulokset näyttävät nyt tältä, koska kontravariantista versiosta on tiputettu ristikkäitermit pois, eikä vertailu siten ole oikein yhteismitallinen.

2.23 Gu [37]

Kirjoittaja on kehittänyt kaksi Rhie & Chow interpoloinnin modifikaatiota, joissa ulkoisen voimakentän vaikutus otetaan huomioon. Menetelmä on implementoitu Harwell'in FLOW3D:hen (nykyisin CFX), eli käytössä on limittämätön hila ja käyräviivaiset koordinaatit.

Kirjoittajan mukaan Rhie & Chow toimii hyvin, niin kauan kuin painegradientti ajaa virtausta. Jos virtaukseen vaikuttaa myös lähes konservatiivinen ulkoinen voimakenttä, voi suurestakin painegradientista huolimatta virtaukset olla säyseitä. Tällöin Rhie & Chow antaa kehnon pintanopeuden ja laskenta voi jopa kaatua.

Ensimmäisen menetelmän ideana on kirjoittaa Rhie & Chow interpolaatio muotoon

$$U_e = \frac{U_E + u_P}{2} + k_1(\overline{\nabla P_e} - \nabla P_e) - (\overline{B_e} - B_e) \tag{10}$$

eli ulkoinen voimakenttä otetaan interpolointiin mukaan. Kerroin k_1 on pelkkä pelkistys. Lisätermi $(\overline{B_e} - B_e)$ kuvataan toisen kertaluvun tarkkuudella ($\sim \Delta x^2$) toisin kuin Rahman [38], joka kuvasi termin ensimmäisen kertaluvun tarkkuudella ($\sim \Delta x$). Tottahan sen voi tehdä toisen kertaluvun tarkkudella, jolloin siihen tarvitaan 4 pistettä/pinta. Tällöin johto ei ole "ortodoksinen" kuten Rahmanilla, mutta mitä sillä on väliä, kunhan tarkkuus ei kärsi. Lisätermin etumerkki pitänee valita kuten liikemääräyhtälöiden manipulointi sen antaa, kuten on painetermin laita (perusteena omat testilaskelmani). Ulkoisen voimakentän lisätermin ongelmaksi kirjoittaja mainitsee reunojen läheisyyden, jolloin tarvitaan alueen ulkopuolisia arvoja, jotka voivat aiheuttaa pahankin virheen pintanopeuteen. Tämän välttämiseksi tekijä esittää uuden modifikaationsa

$$U_e = \frac{U_E + U_P}{2} + k_1(\overline{\nabla P_e} - \nabla P_e) + \epsilon(\overline{\nabla U_e} - \nabla U_e) \tag{11}$$

tai sama on esitetty muodossa

$$U_e = \frac{U_E + U_P}{2} + k_1(\overline{\nabla P_e} - \nabla P_e) + \epsilon \frac{\partial^3 U}{\partial \xi^3} \tag{12}$$

eli lauseke on kirjoitettu kontravariantille nopeudelle ja lisätermi on $\sim \Delta\xi^2$. Kerroin ϵ on normalisoitu toinen derivaatta

$$\epsilon = \frac{|U_{i+1} - 2U_i + U_{i-1}|}{|U_{i+1}| + 2|U_i| + |U_{i-1}|} \tag{13}$$

jonka arvo kasvaa kun nopeus alkaa oskilloida. Miksi käytetään oskilloinnin mittauksen suurena nopeutta, kun paine oskilloi? Tätä ei kerrota. Mielenkiintoista on, että uusi vaimennin on Jameson-tyyppinen.

Testilaskujen osassa kirjoittaja toteaa, että voimakkaassa ulkoisessa voimakentässä painetermi saa helposti kertaluokkia suurempia arvoja kuin nopeuksien keskiarvo $\Rightarrow$ epäfysikaalinen pintanopeus. Lämmön ajamassa cavity flow'ssa $Ra = 10^6$ version [37]: (10) tulos seinän lähellä ei ole oikein, vaan nopeus on epäfysikaalisen suuri (sain itse samanlaisia tuloksia tavallisella RC:lla eristetyn katon viereisissä kopeissa, mutta ongelmat johtuivat paineen/painekorjauksen reunaehtojen käsittelystä, kuinka Gu:lla?). Tarkempi tulos saadaan lauseketta [37]: (11) käyttäen, jota ainoastaan myöhemmin sovelletaan.

Seuraavaksi esitetään jokin Laurentz-voima tapaus.

Kolmanneksi on laskettu vapaan konvektion tapaus "ABB ATOM PIUS". Se on sylinteritankki, jossa yläpuolikkan seinät ovat lämpimiä ja alapuolikkaan kylmiä, $Ra = 10^{10}$. Turbulenssi on kuvattu jollakin Boussinesq'n approksimaatioon perustuvalla mallilla. Nopeudet ovat hyvin alhaisia, mutta voimakenttä suuri. Tavallisella Rhie & Chow'lla laskenta ei konvergoidu, mutta modifikaatiolla [37]: (11) konvergoituu. Tulosten laadusta tai vertailusta koetuloksiin ei puhuta mitään.

2.24 Blosch, Shyy ja Smith[39]

Artikkelin pääkohdat ovat 1) hyvin määritelty painekorjaus-yhtälö ja 2) *avoimien reunojen ehtojen määrittely.* Kirjoittajat toteavat, että kullakin iteraatiolla globaalin massataseen tulisi toteutua, jotta konvergenssi ei hidastuisi. Tämä johtuu seikasta, että massataseesta laskettu painekorjaus määrää uuden painejakauman. Jos em. ehto toteutuu, voi ulosvirtausreuna olla "pyörivän virtauksen alueella".

Johdanto antaa ymmärtää, että yhdistettäessä yhtälöitä ryhmiksi (simultaneous solution) kannattaa jatkuvuus ja liikeyhtälöt olla yhtenä ryhmänä. Artikelin yhtälöissä ei esiinny gravitaatiota, ja kuinka on ryhmittely tuolloin? *Hila on limitetty.*

Kirjoittajien mielestä painekorjausmenetelmän ongelma se, ettei liikemääräyhtälöistä saadut nopeudet toteuta globaalia massatasetta. Tapauksessa "backward facing step" kirjoittajat panevat globaalin massataseen toteutumaan lisäämällä tarvittavan vakionopeus-profiilin ulosvirtausreunalla. Aiemmin todettiin, että olipa nopeuden reunaehto Dirichlet'n tai Neumann'in tyyppiä, ei nopeutta tarvitse korjata. Eli ulosvirtauksen nopeudet lasketaan Neumann'in reunalla sisäpisteiden arvoista. Seuraavaksi lasketaan globaali massavirhe, minkä jälkeen ulosvirtausreunalle lisätään vakio-profiili globaalin massataseen toteutumiseksi. Nyt nopeus pultataan (ei korjata painekorjauksen avulla) ja painekorjauksen reunaehdoksi annetaan nyt luonnollinen Neumann'in ehto. Konvergoituminen nopeutuu, mutta johtuuko se pelkästään globaalista massataseesta vai myös oikean kaliberin arvon heittämisestä ulosvirtausreunalle ensimmäisestä iteraatiokierroksesta alkaen?

2.25 Zhang, Assanis ja Tamamidis [40]

Artikkelissa esitetään kokoonpuristuvan virtauksen laskentamantelmä, jossa yhtälöt lasketaan yksi kerrallaan (decoupled eqs. tai sequential approach). Tätä tyyppiähän perinteiset painekorjausmenetelmät ovat. Artikkelin menetelmä laskee jatkuvuus-, liikemäärä- ja tilayhtälöstä (+ kokonaisenergia) tiheyden, karteesiset nopeudet ja paineen aikaintegroiden (expl. 4-stage R-G). Menetelmä ratkaisee liikemääräyhtälöt soluissa, ja pintanopeuksien arvot lasketaan eksplisiittisesti "pintasolujen" liikemääräyhtälöistä, eli käyttäen MWIM:ä. Liikemäärä- ja jatkuvuusyhtälössä konvektio on kuvattu Leonard'in QUICK'llä. Lisäksi tarvitaan energiayhtälö. Ratkaisija olettaa, että sisäenergian ja kineettisen energian summa on vakio. Aikaintegroinnissa käytetään paikallista aika-askelta.

Tekijät painottavat, ettei pintanopeuden interpolointi-menetelmä ole Rhie & Chow, sillä menetelmä perustuu aikaintegrointiin eikä SIMPLE-algoritmin tyyppiseen iterointiin, mutta mitähän tuollakin yritetään sanoa. Kontravariantit pintanopeudet lasketaan kaavalla [40]:(17), joka on eräänlainen pintasolun (i+1/2) eksplisiittinen liikemääräyhtälö, jossa esiintyy vain muuttujien soluarvoja ja kertoimien interpolantteja. Mielestäni pintanopeuden lausekkeessa on voimakkaasti Rhie & Chow'n henkeä kirjoittajien vastaväitteistä huolimatta.

Testilaskut on laskettu kokoonpuristuvalla alueella $Ma > 0.3$, mikä on MWIM:n uusi sovellusalue.

2.26 Tamamidis ja Assanis [41]

Paperin tarkoituksena on vertailla korkeampia diskretointiatapoja esimerkkien avulla. Ratkaisija käyttää *yleisiä käyräviivaisia koordinaatteja. Liikemääräyhtälöiden muuttujia ovat karteesiset nopeuskomponentit ja jatkuvuusyhtälö on kirjoitettu kontravarianteille komponenteille.* Pintanopeudet ovat siis kontravariantteja nopeuksia, jotka lasketaan tavanomaisella *Rhie & Chow'lla*, jossa on mukana epäorthogonaalisuudesta aiheutuvat korjaukset. Painekorjausmenetelmäksi on valittu *SIMPLEC*. Konvektion diskretointiin käytetään 3-pisteen QUICK:iä ja 5-pisteen ylävirtapainotteista menetelmää. Tekstin perusteella ajatus on välttää limitterin käyttö korkeamman asteen konvektiomallilla.

Testilaskut on suoritettu laminaarissa ja turbulentissa suorassa ja käännetyssä kanavassa. Päätelmänä esitetään, että korkeamman kertaluvun menetelmää käytettäessä päästää tarkempaan tulokseen harvemmalla hilalla. *Mutta lopultakin 3- ja 5-pisteen konvektiomallin käytön kokonaiskustannus on kuitenkin melkoisen sama: mitä hilassa voitetaan se iteroinnissa hävitään.*

2.27 Peric [31]

Tässä artikkelissa Peric tutkii gridin epäortogonaalisuuden vaikutusta painekorjausmenetelmään. Tavallisesti mukavuussyistä ne tiputetaan painekorjausyhtälöstä pois. Peric hakee rajan, jolloin termit on pakko ottaa mukaan.

Peric'in esittämä kokoonpuristumattoman virtauksen ratkaisija on perinteinen. Painekorjauksen ratkaisu vie paljon tehoa, usein kaikki reunaehdot ovat Neumann'in tyyppiä. Tämän johdosta moni pelkistää painekorjausyhtälön muotoon, jossa epäortogonaalisuutta ei esiinny.

Testilaskut on tehty suunnikkaan muotoisella "cavity flow'lla". Suorakulmaisen tapauksen terävä kulma on luonnollisesti 90^o. Kun solun terävä kulma on 60^o, vaatii pelkityttä painekorjausyhtälöä käyttävä ratkaisija $\sim 2\frac{1}{2}\times$ enemmän iteraatioita kuin täydellinen versio. Lisäksi relaksaatiokertoimien konvergoituva alue on selvästi kaventunut. 45^o tapauksessa iteraatioden tarve on edelleen $\sim 2\frac{1}{2}$-kertainen, mutta konvergoituva alue on kaventunut entisestään. 30^o tapauksessa iteraatioiden tarve on $\sim$ 5-kertainen. Mielenkiintoista on, että olipa hila ortogonaalinen tai ei, niin tarvittavien iteraatioiden määrä on sama

Päätelmissä Peric toteaa että 1) jos hila ei ole voimakkaasti käyrä (terävä kulma yli 45^o), niin pelkistetty painekorjauyhtälö on tehokkain valinta, etenkin 3D tapauksissa. Relaksoinnille Peric esittää arvoja $\alpha_u = .7 - .8$ ja $\alpha_p = .1 - .2$, missä pienimmät arvot vastaavat voimakkaampaa käyryyttä. 2) Jos hilan terävät kulmat ovat alle 45^o, niin täydellistä painekorjausyhtälöä on melko varmasti käytettävä konvergoinnin varmistamiseksi tai kiihdyttämiseksi. 3) Peric suosittelee bikonjukaattimenetelmää täydellisen painekorjausyhtälön ratkaisemiseksi. SIP-perhe vaatii probleemakohtaisen relaksaatiokertoimen, jonka optimin haku voi olla kallista. 4) Lopuksi Peric toteaa, että 3D tapauksissa täydellinen painekorjausyhtälö on raskas, ja sitä pitäisi jotenkin yksinkertaistaa pudottamatta epäortogonaalisuutta kokonaan pois.

2.28 Rodi Majumdar ja Schönung [42]

Artikkeli on lähinnä yleiskatsaus kokoonpuristumattoman virtauksen laskentaan, ja siinä annetaan yleisluontoisia ohjeita ja toteamuksia. Niistä ehkä akuuteimmat ovat:

> -For FVMs employing general curvilinear non-orthogonal grids, the use of non-staggered mesh arrangements with connection with Cartesian velocity components may have advantages over the other possibilities.
> -coupled solution procedures have been found competitive with uncoupled ones only in connection with multigrid methods. At the present it is not entirely clear whether, in connection with multigrid methods, the coupled or uncoupled solution approach is the more efficient method. The efficiency of the method can still be improved significantly by incorporating the multigrid method.

Artikkelissa esitetään esimerkki-ratkaisija, jossa on tehty seuraavia valintoja

> -yleiset käyräviivaiset koordinaatitja liikemääräyhtälöissä tuntemattomina karteesiset nopeuskomponentit
> -konvektio kuvattu HYBRID:llä ja diffuusio keskeisdifferenssillä
> -SIMPLE painekorjausmenetelmä
> -pintanopeudet lasketaan MWIM:llä (Peric)
> -painekorjausyhtälöstä tiputetaan epäortog. tulevat lisätermit
> -pinta ja soluarvot korjataan sellaisenaan

Artikkeli on yleisluonteinen ja sopisi ehkä jonkinlaiset taustatiedot omaavalle numeerikoille jonkinlaiseksi johdannoksi kokoonpuristumattoman virtauksen numeeriseen laskentaan ollen kuitenkin joiltakin osin vanhentunut.

2.29 Jeng ja Liou [43]

Kirjoittajat ovat kokeilleet erilaisia avoimen reunan reunaehtoja kaupallisella TEACH koodilla (muistelen, että Spalding on jotenkin koodin takana) erilaisissa laajenevissa 2D putkissa. Yleisiä *käyräviivaisia* koordinaatteja käytetään, ja liikemääräyhtälöiden muuttujina ovat *karteesiset nopeuskomponentit.* Konvektio on kuvattu *power law'lla.* Limittämättömässä hilassa käytetään *Rhie & Chow interpolointia kontravarianttien pintanopeuksien* laskentaan, ja niitä alirelaksoidaan (mielestäni kummallisesti [43]:(7)) Majumdar'iin viitaten. Näyttää kuitenkin siltä, että konvergoitunut pintanopeus on identtinen Rhie & Chow interpolantin kanssa.

Kirjoittajat muistuttavat globaalista painekorjauksen ehdosta

$$\oint_{domain} \frac{\partial p'}{\partial n} d\Gamma = \sum \dot{m}^* \tag{14}$$

mutta toteavat myöhemmin, ettei ehto käytännössä toteudu, koska painekorjausta ei iteroida milloinkaan tarkasti. Vaikuttaa siltä, ettei ehdon tarvitsekaan toteutua. Avoimen reunan ongelmissa suurin massavirhe esiintyy avoimen reunan viereisissä soluissa. Kirjoittajat kokeilevat reunaehtoja, joilla avoimen reunan viereisten koppien massabalanssi toteutuu (ehdot 3 ja 4 seuraavassa).

Avoimelle reunalle kirjoittajat kokeilevat 4 reunaehtoa: 1) suora upwindaus $u_e = u_P$ ja $v_e = v_P$, 2) upwindaus + vakio, $u_e = u_P + u^c$ ja $v_e = v_P + v^c$ jolla globaali massatase saadaan täsmäämään, 3) diffuusiolle $u_e = u_P$ ja $v_e = v_P$ ja konvektiolle $U_e = U_w$ (kontrav.) ja 4) diffuusiolle $u_e = u_P$ ja $v_e = v_P$ ja konvektiolle $U_e = U_w - V_n + V_s$ (kontrav.). Ehto 3 muuttaa virtauksen 1D:ksi, sillä sen pitäisi johtaa soluissa ehtoon $V_n = V_s = 0$, koska putken reunat ovat läpäisemättömiä seiniä. Ehto 4 ei pulttaa reunan sivuttaista virtausta nollaksi. *Reunahdot ovat ensimmäisen kertaluvun tarkkoja.* Kaikilla ehdoilla painekorjaukselle käytetään Neumannin ehtoa.

Kirjoittajat kokeilivat toisen kertaluvun tarkkojakin versioita, mutteivat esitä mitään tuloksia, koska päätelmät ovat samoja kuin ensimmäisen kertaluvun versioilla. *Ekstrapolointiehdon $U_{\xi\xi} = 0$ käyttö johti epästabiilisuuteen, joten se hylättiin.*

Päätelmissä kirjoittajat toteavat, että ehto 3 on aina stabiili ja antaa Shyy'n limitetyssä hilassa laskemia tuloksia vastaavia arvoja. Jos ulostuloreunalla ei esiinny pyörteitä, ehdot 3 ja 4 käyttäytyvät samalla tapaa ja ehto 2 konvergoituu selvästi hitaammin. Jos ulosvirtauksessa esiintyy pyörteitä, ehdot 2 ja 4 ovat toisinaan epästabiileja.

Artikkeli on hieman outo, sillä kirjoittajat kiittelevät alaviitteissä jatkuvasti referee'itä. Syynä lienee, että artikkeli on mennyt läpi kolmatta vuotta jatkuneiden ponnistelujen jälkeen.

2.30 Williams [29]

Artikkeli esittelee painekorjausmenetelmän ja pseudokompressibiliteettimenetelmän kombinaation, jolla voidaan laskea kokoonpuristumattomia virtauksia. Tiheys on vakio. Reunaehdot ovat ensimmäisen kertaluvun tarkkoja. Kaikilla reunaehdoilla painekorjaukselle käytetään Neumannin ehtoa. *Hila on suorakulmainen* ja limittämätön, ja *pintanopeudet lasketaan todennäköisesti Rhie & Chow'lla* (viitattu, muttei yksikäsitteisesti kerrottu).

Pseudokompressibiliteetti- ja painekorjausmenetelmän jatkuvuusyhtälöt kirjoitetaan dimensiottomiin muotoihin, ja ne lasketaan tylysti yhteen. Lopputulos voidaan pelkistää muotoon

$$\Omega\frac{\partial p}{\partial t} - a\nabla\cdot\nabla p' = -\nabla\cdot\vec{v^*} \qquad (15)$$

missä Ω on kokemusperäinen painokerroin. Tarkempia yksityiskohtia ratkaisijasta ei kerrota (mm. miten ed. paine käsitellään), mutta edellisestä yhtälöstä ratkaistaan painekorjaus p'. *Yhtälön idea on diagonaalialkioiden painon kasvatus*, jolloin painekorjausyhtälön ratkaisuun ei mene tolkuttomasti CPU-aikaa, kuten tavanomaisilla painekorjausmenetelmään perustuvilla ratkaisijoilla. *Konvektio ja diffuusio on kuvattu keskeisdifferenssillä.*

Testilaskut on tehty cavity flow'lla $Re = 100$ ja $Re = 400$. Esitettyä -, pseudokompressibiliteetti- ja painekorjausmenetelmää on verrattu keskenään. Chorinin pseudokompressibiliteettimenetelmä on nopein, esitetty menetelmä on lähes yhtä nopea ja SIMPLE selvästi hitain $Re = 100 \sim 2 \times CPU$ ja $Re = 400 \sim 1.9 \times CPU$.

2.31 Tamamidis, Zhang ja Assanis [44]

Artikkelissa verrataan FDM-pohjaista ACM:a (Artificial Compressibility Method) ja CVM-pohjaista PCM:a (Pressure Correction Method) keskenään yleisissä *käyräviivaisissa* koordinaatistoissa. Kirjoittajat esittävät, että artikkeli on ensimmäinen 3D & yleiset koordinaatit vertailu. Liikemääräyhtälöissä *muuttujina ovat karteesiset nopeuskomponentit*, ja jatkuvuusyhtälö on kirjoitettu kontravariantteja nopeuksia käyttäen. *PCM:n pintanopeudet lasketaan Rhie & Chow'lla.* Konvektio kuvataan *PCM:ssä QUICK:lla* ja ACM:ssä keskeisdifferenssillä ja QUICK:lla. ACM:n jatkuvuus- ja liikemääräyhtälöt lasketaan yhtenä ryhmänä, joka ratkaistaan aika-integroiden: Beam & Warming approximate factored finite-difference scheme. ACM:n yhtälöihin lisätään 4 kertaluvun vaimennustermit. *PCM:ssä ryhmä on jaettu kahteen osaan: 1) liikemääräyhtälöt 2) jatkuvuusyhtälö,* ja molemmat ryhmät lasketaan ADI:lla.

Painekorjausmenetelmänä on *SIMPLEC*. Silti nopeutta ja painetta alirelaksoidaan, vaikka SIMPLEC:llä pitäisi päästää siitä. Kirjoittajat hakevat relaksoinnin optimaalisia arvoja ($\alpha_p \sim 0.7$ ja $\alpha_v \sim 0.9$). Kirjoittajat antavat yleisohjeeksi $\alpha_p = \alpha_v = 0.5$, jolla kannattaa aloittaa.

Testit on laskettu laminaarisilla suorilla ja käyrillä kanavilla. PCM:n tulokset hienokseltaan parempia kuin ACM:n, sillä PCM:ssä massa säilyy tarkemmin (väittävät sen johtuvan ACM:n vaimennustermeistä, mutta tuohan Rhie & Chow vaimennustermit myös PCM:ään?). Hilan resoluution tarve on kuitenkin samaa suuruusluokkaa. ACM konvergoituu nopeammin, sillä jatkuvuus- ja liikemääräyhtälöt ratkaistaan yhtenä ryhmänä, ja PCM:ssä kahdessa ryhmässä, liikemääräyhtälöt ja jatkuvuusyhtälö. Esimerkkitapauksessa vertailuolosuhteissa ACM vaati 300 iteraatiota ja PCM 550.

Käyttäjän tulee valita PCM:ssä nopeuden ja paineen alirelaksoinnin parametrit. Kuten aiemmin todettiin, niiden valinta on kohtuullisen helppoa. ACM:ssä tarvitsee kiinnittää vain yksi parametri, mutta se onkin jo huomattavasti hankalampaa. *Tästä johtuen PCM* *on käyttäjäystävällisempi.*

Vertailulaskusta vektorikoneessa (Cray-Y/MP) PCM selvisi 1 CPUmin:ssa ja ACM 5:ssä. Vaikka PCM vaatii tuplasti iteraatioita, sen vektoroidut tridiagonaalimatriisit aukeavat liukkaasti (∼70-140 MFLOPS) ja ACM aukeaa tahmeasti (∼30 MFLOPS). Skalaarikoneessa (IBM Risc 6000 workstation) esimerkki kulkee PCM:llä 100 min:ssa aj ACM:lla 42 min:ssa. On muistettava, että PCM on viritetty vektorikoneelle, eikä muutoksia skalaarikoneen ympäristöön ole tehty. Molemmissa koneissa ACM vaatii 16 kertaa enemmän muistia kuin PCM.

2.32 Mathur ja Murthy [45]

Kirjoittajat ovat FLUENTin kehittäjiä, ja kuvaavat *rakenteettoman* limittämättömän "cell-centred" hilan ratkaisijaansa. Ratkaisija on kontrollitilavuus-pohjainen ja soveltuu kokoonpuristumattomille virtauksille. Yhtälöt on kirjoitettu säilymismuotoisiksi. Liikemääräyhtälöissä *muuttujina ovat karteesiset nopeuskomponentit.* Konvektio kuvataan ylävirtapainotteisesti, ja se esitetään artikkelissa muodossa

$$\phi_f = \phi_{upwind} + \nabla\phi_{r,upwind} \cdot d\mathbf{r} \tag{16}$$

missä oikean puolen toista termiä kutsutaan "reconstruction gradient at the upwind cell". Sen voinee tulkita Taylorin sarjan ensimmäiseksi derivaataksi. Konvektion mallin sanotaan olevan toisen kertaluvun tarkka. Diffuusio kuvataan myös toisen kertaluvun tarkasti, jossa poikittaissuunnan derivaatta on korvattu periaatteeltaan Rhie & Chow interpolointia muistuttavalla lausekkeella.

PWIM:ä käytetään pintanopeuksien laskentaan (viittaus Rhie & Chow'n) + alirelaksointia (Majumdar). Painekorjausmenetelmäksi on valittu *SIMPLE*. Solunopeudet, pintanopeudet ja paine korjataan sellaisinaan.

Itse ratkaisija perustuu algebrallisen multigridin käyttöön, jolloin karkean tason diskretoinnilta vältytään.

2.33 Lien ja Leschziner [46]

Kirjoittajat esittelevät ratkaisijansa, jolla on tarkoitus laskea teollisuussovelluksia. He kuvaavat ratkaisijansa joiltakin osin hyvinkin yksityiskohtaisesti. Sen pääpiirteitä ovat

-strukturoitu limittämätön hila
-yleiset käyräviivaiset koordinaatit
-yhtälöt säilymismuotoisia

-CD-ratkaisija perustuu aika-integrointiin, konvektio kuvattu van Leerin limitoidulla MUSCL:lla
-liikemääräyhtälöitä alirelaksoidaan, muuttujina karteesiset nopeuskomponentit
-pintanopeudet lasketaan alirelaksoidulla (Majumdar) Rhie & Chow'lla
-jatkuvuusyhtälö kirjoitettu kontravarianteille nopeuksille
-SIMPLE painekorjausmenetelmä + paineen alirelaksointi
-pintanopeudet korjataan sellaisinaan
-2-yhtälö ja RSM turbulenssimallit, joiden kuvaukseen uhrattu puolet artikkelista

Merkillistä on, että alirelaksointiin on päädytty liikemääräyhtälössä ja jopa pintanopeuksien lausekkeissa.

2.34 Johansson ja Davidson[4]

Kirjoittajien testeissä Rhie & Chow interpolointi kaatui, kun $Ra = 10^7$ ja oskilloi kun $Ra = 10^6$. Kirjoitelman ideana on hakea konvergoiva tapa laskea suurillakin Rayleigh'n luvuilla. Kirjoittajat muokkaavat Rhie & Chow interpoloinnin muotoon, jossa painegradienttien kertoimet separoidaan ja interpoloidaan siten, että ne saadaan yhteiseksi tekijäksi. Tällöin painegradienttien erotus on aina dissipaatiotermi, ja lisäksi vaimennin on yksinkertaisempi kuin alkuperäisessä Rhie & Chow interpoloinnissa. Lisäksi kertoimeen lisätään vapaasti valittava kerroin $C \approx 0.5$, jolla dissipaation määrää voidaan säädellä, eikä kertoimessa esiinny nopeuden alirelasointia. Käytettäessä RC-interpolointia jatkuvuusyhtälö korvautuu yhtälöllä

$$\nabla \cdot \vec{v} = h^2 \Big(\frac{\partial^4 p}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 p}{\partial y^4} + \frac{\partial^4 p}{\partial z^4} \Big) \tag{17}$$

Ratkaisija perustuu *kontrollitilavuus-menetelmään ja yhtälöt esitetty vektorimuotoisesti.* Toisaalta kaikki laskentatapaukset ovat *karteesisia.* Ratkaisijassa konvektio kuvataan *QUICK*:llä paitsi $k - \epsilon$ yhtälöissä HYBRID:llä. Multigridiä (FMG-FAS-V) käytetään, koska sen yhteydessä hilan kasvaessa laskentatyö kasvaa lineaarisesti ja ilman MG:tä neliöllisesti. Multigridiä käytetään kaikille yhtälöille. Painekorjausmenetelmänä käytetään *modifioitua SIMPLEC:tä.* Massabalanssin ja painekorjauksen ympärille tekijät ovat rakentaneet loopin, jota ajavat ~ 4 kertaa pääloopin aikana. Ajatuksena tuntuu olevan se, että tällöin massavirhe (=Poisson'in yhtälön lähdetermi) pienenee, mikä mahdollisesti nopeuttaa laskentaa (?). Lisäksi painekorjauksen kertoimia modifioidaan painedissipaation avulla.

Modifioidulla Rhie & Chow interpoloinnilla tapaus $Ra = 10^7$ konveroituu.

2.35 Miller ja Schmidt [6]

Artikkelin tarkoitus on 1) PWIM:n implementointi limittämättömään SIMPLE-algoritmiin, 2) tutkia tulosten riippuvuutta alirelaksoinnista ja 3) verrata limitetyn ja limittämättömän hilan tuloksia keskenään.

Koordinaatisto on *karteesinen*, ja konvektio on mallinnettu *QUICK:lla. Pintanopeudet päivitetään suoraan* ilman soluarvoja.

PWIM kehitetään liikemääräyhtälöistä "ortodoksisesti". Pintanopeuden relaksoinnin ei pitäisi näkyä lopullisessa tuloksessa, mutta näkyy varmasti keskeneräisessä.

Testilaskussa (äkillisesti kapeneva putki) esiintyy epäfysikaalisia pintanopeuksia (selvästi ulkona viereisten soluarvojen rajoista). Kaikkein todennäköisimmältä syyltä näyttää liian karkea hila kaventumassa $\Delta x = .092R_L$. Lisäksi ongelmia voivat aiheuttaa ja/tai vahvistaa QUICK ja reunaehdot.

2.36 Rhie ja Chow [2]

Artikkeli, johon pääasiassa viitataan Rhie & Chow interpoloinnista puhuttaessa. Menetelmä esitetään lyhyesti artikkelin teoriaosan loppupuolella, mutta suhde liikemääräyhtälöön ei oikein tule ilmi.

Yleisiä *käyräviivaisia* koordinaatteja käytetään, ja konvektio kuvattu *HYBRIDillä*. Kaikesta päätellen *pintanopeudet korjataan suoraan*. Painekorjausmenetelmäksi on valittu *SIMPLE*.

2.37 Rahman et al. [38]

Artikkelissa esitellään nosteen vaikutuksen huomioon ottava pintanopeuden laskentatapa, joka perustuu PWIM:iin. Lisäksi artikkelissa esitetään yksinkertaistettu QUICK-diskretointi.

Ratkaisija perustuu kontrollitilavuusmenetelmään, ja karteesinen epätasajakoinen hila on limittämätön ja ns. "cell-vertex" tyyppinen. Liikemääräyhtälöt lasketaan yksi kerrallaan, ja Patankarin esittämää alirelaksointia käytetään. Nopeudet ja paine yhdistetään *SIMPLE*-painekorjausmenetelmällä.

Diffuusio on diskretoitu keskeisdifferenssillä, mutta reunoilla on käytetty 1. kertaluvun toispuoleisia approksimaatioita. Konvektio on kuvattu *1D QUICK:llä*, joka uutuutena esitellään. Siinä on mukana hilan epätasajakoisuuden vaikutus. Myös konvektio käsitellään reunoilla 1. kertaluvun tarkasti.

Pintanopeuden laskentaan on kehitetty uusi lauseke. Tavallisesti liikemääräyhtälöiden lähdetermit, kuten gravitaatio, putoavat toisen kertaluvun tarkalla interpoloinnilla "limitetyn" kopin liikemääräyhtälöstä,

$$\begin{aligned} U_e &= \frac{U_E + U_P}{2} + k_1(\overline{\nabla P_e} - \nabla P_e) - (\overline{B_e} - B_e) \\ &= \frac{U_E + U_P}{2} + k_1(\overline{\nabla P_e} - \nabla P_e) \end{aligned} \tag{18}$$

missä on käytetty hyväksi interpolointia

$$B_e = \frac{1}{2}(B_P + B_E) + O(\Delta x^2) = \overline{B_e} + O(\Delta x^2) \tag{19}$$

joten pintanopeuden lausekkeessa lähdetermejä ei esiinny. Tässä paperissa edellistä 2. kertaluvun interpolointia ei luonnollisestikaan käytetä. Graviaatiotermit solujen keskipisteissä kirjoitetaan Taylorin sarjoiksi kehityskeskusten ollessa kyseisten solujen pinnoilla:

$$\begin{aligned} B_P &= B_e - \frac{\Delta x}{2}\frac{\partial B}{\partial x}\bigg|_e \\ B_E &= B_e + \frac{\Delta x}{2}\frac{\partial B}{\partial x}\bigg|_e \end{aligned} \tag{20}$$

joiden avulla pintanopeudelle voidaan lopulta johtaa lauseke

$$u_e = \overline{u_e} + \frac{\Delta x}{4}\left(\frac{V_P}{AP_P^u} - \frac{V_E}{AP_E^u}\right)\frac{\partial B}{\partial x}\bigg|_e + \frac{\Delta x^2}{16}\left(\frac{V_P}{AP_P^u} + \frac{V_E}{AP_E^u}\right)\frac{\partial^3 p}{\partial x^3}\bigg|_e \tag{21}$$

Lopuksi Rahman kertoo molemmat vaimennustermit skaalaajalla, jolle hän esittää arvoja $0.5 - 1.0$ viitaten Armfield'in (1991) paperiin.

Lausekkeen ongelma on gravitaatiotermin aiheuttama ensimmäisen kertaluvun tarkkuus. Toisaalta termin kertoimessa esiintyy termin V/AP^u vierekkäisten solujen erotus, joka on tiheällä hilalla pieni. Ongelmana ovatkin karkeat hilat, joita teollisissa sovelluksissa esiintyy riittämättömän laskentakapasiteetin johdosta usein. Termin vaikutusta tulisikin tutkia huomattavasti perusteellisemmin. Toisaalta onko se tarpeellista, sillä Gu [37] on esittänyt toisen kertaluvun tarkan gravitaatiotermin pintanopeuden interpolanttiin.

Rahmanin esittämä modifioitu SIMPLE on tavanomainen limittämättömän hilan versio. Modifikaatio viitannee uuteen pintanopeuden lausekkeeseen. Painekorjausyhtälön kummallinen piirre on se, että liikemääräyhtälön alirelaksointi viedään siihen sisään. Painekorjauksen reunaehdoksi annetaan seinillä Neumann'in ehto. Painetta korjataan alirelaksoiden. Pintanopeudet korjataan suoraan käyttämättä soluarvoja.

Testilaskut on laskettu tapauksella buoyancy-driven cavity flow'lla Rayleigh'n luvuilla 10^6 ja 10^7. Tuloksia on vertailtu CVFEM-tulosten kanssa. On valitettavaa, ettei tuloksia ole verrattu usein käytetyn de Vahl Davis'in [47] datan kanssa. Rahman mainitsee, että tapauksessa 10^7 nopeuden tulokset poikkevat jossakin määrin seinien lähellä, mutta toteaa poikkeaman olevan pientä maksiminopeuteen nähden. Tuo havainto voi liittyä pintanopeuden 1. kertaluvun tarkkuuteen.

Tekstissä mainittiin, että uusi pintanopeuden lauseke nopeuttaa konvergenssiä, mutta siitä ei ole esitetty yhtään kuvaa tai muuta kvantitatiivistä.

2.38 Rahman et al. [30]

Tässä artikkelissa Rahman et al. esittävät yksinkertaistetun painekorjausyhtälön. Menetelmän tehoa kuvataan SIMPLECn kaltaiseksi. Lisäksi edellissä artikkelissa [38] esitetyn modifioidun Rhie & Chow interpolaation testaamista jatketaan tässä paperissa.

2D hila on limittämätön (cell-vertex), ja käytössä on *yleiset käyräviivaiset koordinaatit. Liikemääräyhtälöissä muuttujina käytetään karteesisia nopeuskomponentteja*, ja yhtälöt ratkaistaan yksi kerrallaan. Liikemääräyhtälöitä alirelaksoidaan, ja lisäksi diagonaalin painona käytetään epästationääristä termi, mutta miksi molempia on käytettävä samanaikaisesti, sillä luulisi pelkästään toisen riittävän. Lisäksi artikkelissa esitetään aika-askeleen laskentaan kaava

$$\Delta t \approx max\left(\frac{|\phi_P| + \epsilon}{|R_P^\phi| + \epsilon}\right) \tag{22}$$

$$R_P^\phi = a_P^\phi \phi_P - \sum_{nb} a_{nb}^\phi \phi_{nb} - S_P^\phi \tag{23}$$

eli aika-askel on vakio laskenta-alueessa, mutta sen arvo muuttuu iteraatiolta toiselle. Silmiinpistävää on, että kaavassa (22) dimensiot eivät täsmää. Muutoin aika-askeleen laskenta perustuu residuaalin korjaukseen. Kun residuaali pienenee, aika-askel pitenee. Pientä termiä ϵ käytetään estämään nollalla jakamista.

Painekorjausmenetelmä kehitetään SIMPLEC idean $a_P u'_P \approx \sum_{nb} a_{nb} u'_{nb}$ pohjalta, minkä ovat aiemmin esittäneet Jessee ja Fiveland [28] sekä Hirsch [48], joihin ei tässä työssä viitata. Nopeuskorjaus kirjoitetaan muotoon

$$u'_P = -\frac{\Delta t'}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial x}\bigg|_P \tag{24}$$

missä kertoimelle esitetään arvoja $\Delta t' > (\rho V/a)_P$, eli palataan alkuperäisen SIMPLEn kertoimen äärelle. Edellinen valinta alirelaksoi painekorjauksia. Lisäksi nopeuskorjauksen lauseke kerrotaan termillä α_P, joka alirelaksoi edelleen suoraan painekorjausyhtälöä, jolloin esitys paineen alirelaksoinnin tarpeettomuudesta on kyseenalainen. Kertoimelle esitetään arvoja $\alpha_P = 5 - 500$. Ratkaisualgoritmi toimii *SIMPLE*n periaatteen mukaisesti.

Solujen pintanopeuksina käytetään kontravariantteja komponentteja. Lausekkeessa esiintyy 1. kertaluvun tarkka gravitaatiotermi, joka on esitetty edellisessä artikkelissa [38]. *Painekorjauksen jälkeen pintanopeudet päivitetään suoraan.*

Diffuusio kuvataan keskeisdifferenssillä. Reunoilla diffuusio kuvataan ensimmäisen kertaluvun menetelmällä. Konvektio kuvataan edellisen artikkelin *1D QUICK:llä*, ja reunojen läheisyydessä diskretointi on 1. kertaluvun tarkka.

Testit on laskettu kahden erisäteisen sylinterin väliin jäävässä tilassa, jossa sisempi sylinteri on lämmin ja ulommainen on kylmä, $Ra = 10^6 \; ja \; 7 \times 10^6$. Tuloksia on verrattu CVFEM tuloksiin pienemmällä Rayleigh'n luvulla. Lisäksi vertailua on tehty alkuperäisen ja modifioidun Rhie & Chow interpoloinnin välillä. Tulokset poikkeavat toisistaan rajakerroksissa, mutta tarkemmin asiaa ei käsitellä. Tekstin perusteella voidaan päätellä, että modifioitu Rhie & Chow interpolointi antaisi oikeamman tuloksen, mutta sitä ei mitenkään perustella. Suuremmalla Rayleigh'n luvulla modifioitu versio konvergoituu nopeammin eräillä kiinnitetyillä ajoparametreillä, mutta sen laajemmin asiaa ei ole käsitelty. Lopuksi todetaan, että menetelmiä tulisi testata turbulenttisissa virtauksissa.

3 Yhteenveto

Ylivoimaisesti suosituin kokoonpuristumattoman virtauksen ratkaisutapa on painekorjausmenetelmä. Näistä tunnetuimpia ovat SIMPLE, SIMPLEC, SIMPLER ja PISO. SIMPLE:ä käyttävät Melaaen [14], [15], Kobayashi ja Pereira [7], Peric ja Kessler [23], Peric [31], Lapworth [24], Jessee ja Fiveland [28], Choi et al. [36], Jeng ja Liou [43], Rhie ja Chow [2], Rahman et al. [38], sekä Mathur ja Murthy [45]. SIMPLE:n uudempaa kehitelmää SIMPLEC:tä käyttävät Thiart [8] ja [9], Tamamidis et al. [41] ja [44], Rodi et al. [42], Johansson ja Davidson [4], sekä Miller ja Schmidt [6]. Lisäksi SIMPLE-tyyppisiksi voidaan määrittää Date'n [1] ja [5], sekä Lien'in ja Leschziner'in [46] menetelmät.

Kolmea painekorjausmenetelmää ovat vertailleet Jang et al. [25] limitetyssä hilassa. Vertailussa oli mukana PISO, SIMPLEC ja SIMPLER. He totesivat, että PISO soveltuu parhaiten tapauksiin, joissa skalaarimuuttujia ei esiinny liikemääräyhtälöissä. Jos skalaarimuuttujia esiintyy liikemääräyhtälöissä, esimerkiksi lämmön ajamissa virtauksissa, SIMPLE-tyyppinen lähestymistapa on soveliain.

Suhteellisen usein käytetään Doormaal ja Raithbyn [49] kehittämää SIMPLEC:tä. Menetelmä on kehitetty SIMPLE:n konvergenssin parantamiseksi, ja parannusta on myös raportoitu [50]. Lisäksi menetelmän avulla pitäisi välttyä paineen alirelaksoinnilta, esimerkiksi Miller ja Schmidt [6]. Näin ei kuitenkaan aina tehdä, esimerkiksi [4] ja [44]. Syy tähän ei selvinnyt. Voi vain arvata, että konvergenssi paranee alirelaksoitaessa.

Pseudokompressibiliteetti- ja painekorjausmenetelmän välisen vertailun yleisissä 3D koordinaateissa ovat esittäneet Tamamidis et al. [44]. Testit on laskettu laminaareilla virtauksilla. Painekorjausmenetelmän tulokset ovat hienokseltaan parempia, mutta oleellisia eroja ei esiintynyt. Hilojen resoluution tarve on samanlainen. PCM on käyttäjäystävällisempi, sillä nopeuden ja paineen alirelasointikertoimet on paljon helpompi valita kuin ACM:n näennäinen äänennopeus. ACM:n muistintarve on 16-kertainen johtuen yhtälöiden samanaikaisesta ratkaisemisesta.

Williams [29] on kehittänyt pseudokompressibilitetti- ja painekorjausmenetelmän yhdistelmän. Se toimii painekorjausmenetelmän periaatteella. Kehitelmän kantavana ajatuksena on painekorjausyhtälön diagonaalialkioiden painon kasvattaminen, ja siten laskenta-ajan lyhentäminen tavanomaisiin painekorjaumenetelmiin nähden. Cavity flow testilaskuissa Reynoldsin luvuilla 100 ja 400 Williamsin menetelmä oli lähes yhtä nopea kuin pseudokompressibiliteettimenetelmä SIMPLEn viedessä $\sim 2\times$ CPU-ajan edellisiin verrattuna. Käytännössä Williamsin saavuttama parannus voidaan saavuttaa kehittämällä tehokas painekorjausyhtälön ratkaisija, tai yleisemmin ottaen Poisson-yhtälön ratkaisija.

Kokoonpuristumattomia virtauksia lasketaan jonkin verran paineyhtälömenetelmällä (PPEM). Menetelmän perusidea on sijoittaa liikemääräyhtälöt jatkuvuusyhtälöön, josta uusi paine ratkaistaan, ja jota käytetään uudella iteratiokierroksella. Menetelmää ovat käyttäneet Abdallah [17], [18] ja Sotiropoulos et al. [33], [35], [34]. Aksoy ja Chen [16] ovat verranneet painekorjaus- ja paineyhtälömenetelmää limittämättömässä hilassa. Paineyhtälömenetelmä konvergoituu selvästi nopeammin ($\sim 2/3$ CPU-aikaan perustuen) kuin painekorjausmenetelmä, mutta jatkuvuusyhtälö toteutuu selvästi huonommin. Ongelman korjaamiseksi Sotiropoulos ja Abdallah ovat [33] kehittäneet paineyhtälömenetelmän, jossa jatkuvuusyhtälön painedissipaatiota säädetään tapauskohtaisesti, kuten Han [3] sekä Johansson ja Davidson [4] tekevät painekorjausmenetelmissään. Tällöin jatkuvuus saadaan toteutumaan tarkemmin.

Harlow ja Welch'in [19] esittelemässä ensimmäisessä painekorjausmenetelmässä hila oli limitetty. Samoin oli Patankar ja Spalding'in SIMPLE:ssä [51] ja SIMPLER:ssä [11], sekä Doormaal ja Raithby'n SIMPLEC:ssä [49]. Limitetty hila takaa voimakkaan kytkennän solun nopeuksien ja paineen välille estäen jälkimmäisen oskilloinnin. Nopeuksien ja paineen väliset kytkökset katkeavat, jos limittämättömän hilan liikemääräyhtälöiden pintapaine kuvataan keskeisdifferenssillä ja samanaikaisesti jatkuvuusyhtälön pintanopeudet kuvataan niinikään keskeisdifferenssinä. Tällöin solun paine katoaa liikemääräyhtälöistä, kuten käy solun nopeuksille jatkuvuusyhtälössä. Käytäntö on osoittanut, ettei solun nopeuksien ja paineen "epäsuorat" kytkökset naapurisolujen yhtälöiden kautta ole riitäviä, ja parillisten ja parittomien solujen painetasot voivat poiketa toisistaan, eli paine oskilloi.

Limitetyssä hilassa joudutaan käyttämään 3-D tapauksissa neljää hilaa, yksi kullekin liikemääräyhtälölle ja yksi skalaareille. Varsinkin monimutkaisemmat geometriat, joihin karteesiset hilat eivät enää sovellu, ovat hankalia. Lisäksi limittämättömässä hilassa mm. konvektion kontribuutio on sama kaikille muuttujille, karteesisia nopeuskomponentteja voidaan käyttää helposti liikemääräyhtälöiden muuttujina monimutkaisissakin hiloissa, ja monihilan rakentaminen on selvästi helpompaa [23].

Limittämättömän hilan käyttäjät viittaavat lähes poikkeuksetta Rhie ja Chow'n artikkeliin [2] vuodelta 1983. Menettely on esitetty aiemmin vuonna 1981 kolmessa väitöskirjassa [23], jotka ovat tekijän mukaisessa aakkosjärjestyksessä Hsu, Prakash ja Rhie. Limittämätön hila yleistyi hitaasti, mitä kuvaa Peric et al. [23] kirjoittama "puolustuspuhe" vuodelta (1988). Syynä lienee mm. Patankar'in klassikko [11], joka on ohjannut monen aloittelevan virtausnumeerikon tietä. Kuitenkin 1980-luvun lopulla limittämättömän hilan käyttö alkoi yleistyä. Kaupallisista virtausratkaisijoista FLOW3D lienee ensimmäinen, joka luopui limityksestä noihin aikoihin. Koodin kehittäjät esittivät artikkelin limittämättömän hilan ratkaisijasta 1986.

Rhie & Chow interpoloinnin [2] idea on lisätä keskeisdifferensillä laskettuun pintanopeuteen painegradienttien erotus kyseisellä pinnalla. Lisätermi on Δx^2 verrannollinen, joten sen vaikutus oskilloinnin suodatuksen lisäksi pitäisi olla näkymätön. Rhie ja Chow'n artikkelista [2] ei yksikäsitteisesti selviä, miten lisätermi on johdettu, ja voidaan vain olettaa sen olevan liikemäärään pohjautuva, minkä Miller ja Schmidt [6] esittävät. Rhie & Chow interpolointia on alettu kutsua PWIM:ksi (Pressure-Weighted Interpolation Method).

Peric esitti oman menetelmänsä 1985 väitöskirjassaan. Hän kirjoitti pintanopeudelle liikemääräyhtälön, jossa "viereisten koppien summatermi" interpoloitiin soluarvoilla. Menetelmää on alettu kutsua MWIM:ksi (Momentum-Weighted Interpolation Method). Kuten Miller ja Schmidt'in artikkelin perusteella voidaan päätellä, Peric'in menetelmä on Rhie & Chow interpoloinnin välivaihe, ja jälkimmäinen vaikuttaa käytön kannalta kätevämmältä. Perusajatus on molemmissa luonnollisesti sama, eikä tuloksissa pitäisi esiintyä poikkeamia. Aksoy ja Chen [16] ovat verranneet PWIM:iä ja MWIM:iä painekorjausmenetelmän yhteydessä, ja ne toimivat samanlaisesti kaikissa cavity flow testitapauksissa, Re=100 ja 1000. Tulos on odotusten mukainen.

Rhie'n ja Chow'n [2] esittämää PWIM:iä ovat käyttäneet Melaaen [14], [15], Acharya ja Moukalled [22], Lapworth [24], Wu ja Rath [27], Gu [37], Tamamidis et al. [41], [44], Mathur ja Murthy [45], Lien ja Leschiziner [46], Miller ja Schimdt [6]. MWIM:iä ovat käyttäneet Thiart [8], [9], Kobayashi ja Pereira [7], Aksoy ja Chen [16], Parameswaran et al. [21], Peric ja Kessler [23], Majumdar [13], Jessee ja Fiveland [28], Choi et al. [36], Zhang et al. [40], Peric [31] sekä Rodi et al. [42].

Rhie & Chow interpoloinnista on esitetty joitakin modifikaatioita. Vanhin lienee Han'in [3] esitys. Han käytti tarkkaanottaen pintanopeudelle keskeisdifferenssiä, mutta lisäsi jatkuvuusyhtälöön painedissipaatio-termin, johon myös Rhie & Chow interpolointi johtaa. Han kertoi dissipaatio-termin kertoimella, jonka avulla dissipaation määrää voitiin säädellä tapauskohtaisesti. Myöhemmin Johansson ja Davidson [4] esittivät saman asian pintanopeuden lausekkeessa. Tällä menettelyllä he saivat nosteen ajamia virtauksia konvergoitumaan paremmin.

Konvergenssiongelmat nosteen ajamissa virtauksissa ovat motivoineet myös Gu'ta [37] ja Rahman et al.'ia [38]. Gu implementoi toisen kertaluvun nostetermin pintanopeuden lausekkeeseen kaupallisessa FLOW3D-koodissa. Hän sai kuitenkin epäfysikaalisia nopeuksia pintojen läheisyydessä, ja modifioi lausekkeen. Lopullinen versio käyttää nostetermien sijasta nopeusgradienttien erotusta, joka on kerrottu dynaamisella sensorilla, joka muistuttaa Jameson-tyyppistä vaimennusta [48]. Rahman et al. [38] johtivat nostetermin ortodoksisesti, jolloin siitä tuli ensimmäisen kertaluvun tarkka, mikä sotii yleistä toisen kertaluvun tarkkuusvaatimusta vastaan.

Date esitti ensimmäisessä artikkelissaan [1] tapoja ehkäistä paineen oskillointi limittämättömässä hilassa. Ensimmäinen menetelmä oli epäsymmetrinen Rhie & Chow interpolointi, joka ei ole enää toisen kertaluvun tarkka. Toinen menettely oli aivan uusi. Siinä pintanopeudet laskettiin keskeisdifferenssinä, mutta liikemääräyhtälöiden pintapaineille kehitettiin monimutkaisempi tai korkeamman asteen kaava. Molemmilla menetelmillä paineen oskilloinneilta vältyttiin, mutta esimerkkilaskut suoritettiin hyvin yksinkertaisilla tapauksilla, joissa paineen oskillointia ei välttämättä esiinny edes keskeisdifferensseillä [22]. Date'n jälkimmäistä ideaa kokeilivat myös Russell ja Abdallah [32] paineyhtälömenetelmässään. Menetelmä toimi cavity flow Re=1000 tapauksessa. Siikosen koe osoitti, ettei menetelmä toimi vaikeammissa tapauksissa.

Jälkimmäisessä artikkelissaan Date [5] perui edellisen paperin [1] päätelmiä. Date esitti, ettei pintanopeuden lauseke tai liikemääräyhtälön paineen korkeamman asteen approksimaatio takaa oskilloimatonta painetta, vaan oikein johdettu painekorjausyhtälö. Massan tulee säilyä tarkasti ja paineelle tarvitaan tasoituskomponentteja. Käytännössä Date'n ehdotuksessa jatkuvuusyhtälössä esiintyy vaimennusta kuten liikemääräperusteisissa menetelmissä. Date "uittaa" vaimentimen jatkuvuusyhtälöön vain eri tavalla.

Yksi omalaatuisimmista paineen oskilloinnin ehkäisymenetelmä on Reggio ja Camarero'n [12] ehdotus. Heidän limittämätön hilansa on osittain päällekkäinen, ja on varmasti erittäin hankala 3-D tapauksissa. Vaikuttaa myös vahvasti siltä, ettei sitä voi soveltaa virtauksiin, joissa on useampi kuin yksi päävirtaussuunta.

Liikemääräinterpoloinnin käyttö ei rajoitu painekorjaus-lähestymistapaan. Itse asiassa sitä käytetään limittämättömän hilan PPEM:ssä, esim. Sotiropoulos et al. [33], [35], [34]. Lisäksi Zhang et al. [40] käyttävät liikemääräinterpolointia alisoonisten kokoonpuristuvien virtausten ratkaisemiseen menetelmällä, joka perustuu jatkuvuus-, liikemäärä- ja energiayhtälöiden aikaintegrointiin ja paineen päivitykseen tilayhtälöstä. Lisäksi liikemääräinterpolointia käytetään kokoonpuristuvien virtausten ratkaisemiseen painekorjausmenetelmillä, esim. Lien ja Leschziner [46] sekä Rincon ja Elder [52].

Pintanopeutena käytetään lähes poikkeuksetta kontravariantteja komponentteja. Choi et al. [36] ja Parameswaran et al. [21] operoivat kovarianteilla nopeuksilla, mutta kirjoittavat jatkuvuusyhtälön kontravarianteille nopeuksille.

Pintanopeuden päivitys painekorjausyhtälön ratkaisemisen jälkeen voidaan tehdä suoraan tai solunopeuksien avulla. Suuressa osassa artikkeleita pintanopeudet päivitetään suoraan, esim. Melaaen [14] & [15], Kobayashi ja Pereira [7], Aksoy ja Chen [16], Acharya ja Moukalled [22], Reggio ja Camarero [12], Peric [23], Wu ja Rath [27], Jessee ja Fiveland [28], Rodi et al. [42], Mathur ja Murthy [45], ja Miller ja Schmidt [6]. Ainoastaan Date kertoo yksiselitteisesti päivittävänsä pintanopeudet korjattujen solunopeuksien avulla [5]. Muutaman paperin pohjalta voisi arvata näin tehtävän, mutta lopuista artikkeleista on suhteellisen vaikea edes arvata.

Teollisiin sovelluksiin kelpaavan koodin tulee pystyä käsittelemään monimutkaisiakin geometrioita. Rakenteellisissa hiloissa käytetään kahta lähestymistapaa, yleisiä differenssihenkisiä käyräviivaisia koordinaatteja tai kontrollitilavuusmenetelmään pohjautuvia pinnan normaalivektoreita. Näistä selvästi yleisin oli ensimmäinen, Han [3], Melaaen [14] & [15], Kobayashi ja Pereira [7], Parameswaran et al. [21], Reggio ja Camarero [12], Lapworth [24], Wu ja Rath [27], Sotiropoulos et al. [35] & [34], Choi et al. [36], Zhang et al. [40], Tamamidis93 et al. [41] & [44], Rodi et al. [42], Jeng ja Liou [43], Lien ja Leschziner [46], Rhie ja Chow [2] sekä Rahman et al. [30]. Pintojen normaalien käyttöön perustuva kontrollitilavuusmenetelmä esiintyi vain neljässä paperissa, Peric [31], Johansson ja Davidson [4], Jessee ja Fiveland [28], sekä Mathur ja Murthy [45], mikä on yllättävän pieni ryhmä näinkin suuressa otoksessa. Liikemääräyhtälöiden muuttujina käytetään kuitenkin poikkeuksetta karteesisia nopeuskomponentteja, kuten Reggio ja Camarero suosittelevat [12].

Konvektion diskretointiin noin puolet kirjoittajista oli käyttänyt ensimmäisen kertaluvun menetelmiä, Date [1] & [5], Thiart [8] & [9], Kobayashi ja Pereira [7], Aksoy ja Chen [16], Parameswaran et al. [21], Acharya ja Moukalled [22], Reggio ja Camarero [12], Peric [23], Lapworth [24], Wu ja Rath [27], Choi et al. [36], Rodi et al. [42], Jeng ja Liou [43], sekä Rhie ja Chow [2]. Suosituin vähintään toisen kertaluvun menetelmä oli Leonard'in QUICK [53], jota olivat käyttäneet Miller ja Schmidt [6], Tamamidis et al. [41], [44], Johansson ja Davidson [4], Rahman et al. [38], and Zhang et al. [40]. Toisen kertaluvun upwindauksen ovat valinneet Melaaen [14], [15], Sotiropoulos et al. [35], [34], sekä

Mathur ja Murthy [45]. Han [3], Peric [31] ja Williams [29] ovat käyttäneet keskeisdifferenssiä. Ainoastaan Lien ja Leschziner [46] sekä Jessee ja Fiveland [28] ovat käyttäneet MUSCL diskretointia limittereineen. MUSCL:n käytön vähäisyys on hämmästyttävää, sillä se sisältää kaikki edellä mainitut korkeamman kertaluvun diskretoinnit.

Konvergenssin takaamiseksi käytetään poikkeuksetta alirelaksointia. Lähes poikkeuksetta painetta alirelaksoidaan riippumatta painekorjausmenetelmästä. Liikemääräyhtälöiden alirelaksoinnin, joka on huomattavasti hankalampaa kuin paineen alirelaksointi, yleisyys oli silmiinpistävää. Lienee niin, että se on välttämätöntä stationääritilan yhtälöitä ratkaistaessa.

Viitteet

[1] Date, A., "Solution of Navier-Stokes equations on non-staggered grid," *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 36, No. 7, 1993, pp. 1913–22.

[2] Rhie, C. M. and Chow, W. L., "Numerical Study of the Turbulent Flow Past an Airfoil with Trailing Edge Separation," *AIAA Journal*, Vol. 21, November 1983, pp. 1525–32.

[3] Han, T., "Computational analysis of three-dimensional turbulent flow around a bluff body in ground proximity," *AIAA Journal*, Vol. 27, No. 9, 1989, pp. 1213–1219.

[4] Johansson, P. and Davidson, L., "Modified Collocated SIMPLEC Algorithm Applied to Buoyancy-affected Turbulent Flow Using a Multigrid Procedure," *Numerical Heat Transfer (Part B)*, Vol. 28, 1995, pp. 39–57.

[5] Date, A., "Complete pressure correction algorithm for solution of incompressible Navier-Stokes equations on a nonstaggered grid," *Numerical Heat Transfer, Part B*, Vol. 29, 1996, pp. 441–458.

[6] Miller, T. F. and Schmidt, F. W., "Use of Pressure-Weighted Interpolation Method for the Solution of the incompressible Navier-Stokes Equations on a Nonstaggered Grid System," *Numerical Heat Transfer*, Vol. 14, 1988, pp. 213–33.

[7] Kobayashi, M. and Pereira, C., "Calculation of incompressible laminar flows on a nonstaggered, nonorthogonal grid," *Numerical Heat Transfer, Part B*, Vol. 19, 1991, pp. 243–262.

[8] Thiart, G., "Finite difference scheme for the numerical solution of fluid flow and heat transfer problems on nonstaggered grids," *Numerical Heat Transfer, Part B*, Vol. 17, 1990, pp. 43–63.

[9] Thiart, G., "Improved finite-difference scheme for the solution of convection-diffusion problems with the SIMPLEN algorithm," *Numerical Heat Transfer, Part B*, Vol. 18, 1990, pp. 81–95.

[10] Spalding, D., "A Novel Finite-Difference Formulation for Differential Expressions Involving Both First and Second Derivatives," *Int. J. Num. Methods Eng.*, Vol. 4, 1972, pp. 551–559.

[11] Patankar, S., *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow.* Washington, D.C: Hemisphere, 1980.

[12] Reggio, M. and Camarero, R., "Numerical solution procedure for viscous incompressible flows," *Numerical Heat Transfer*, Vol. 10, 1986, pp. 131–146.

[13] Majumdar, S., "Role of underrelaxation in momentum interpolation for calculation of flow with nonstaggered grids," *Numerical Heat Transfer*, Vol. 13, 1988, pp. 125–132.

[14] Melaaen, M., "Calculation of Fluid Flow with Staggered and Nonstaggered Curvilinear Nonorthogonal Grids - the Theory," *Numerical Heat Transfer (Part B)*, Vol. 21, 1992, pp. 1–19.

[15] Melaaen, M., "Calculation of Fluid Flow with Staggered and Nonstaggered Curvilinear Nonorthogonal Grids - a Comparison," *Numerical Heat Transfer (Part B)*, Vol. 21, 1992, pp. 21–39.

[16] Aksoy, H. and Chen, C.-J., "Numerical solution of Navier-Stokes Equations with nonstaggered grids using finite analytic method," *Numerical Heat Transfer, Part B*, Vol. 21, 1992, pp. 287–306.

[17] Abdallah, S., "Numerical solutions for the incompressible Navier-Stokes equations in primitive variables using nonstaggered grid I," *J. Comp. Physics*, Vol. 70, 1987, pp. 182–192.

[18] Abdallah, S., "Numerical solutions for the incompressible Navier-Stokes equations in primitive variables using nonstaggered grid II," *J. Comp. Physics*, Vol. 70, 1987, pp. 193–202.

[19] Harlow, F. and Welsh, J., "Numerical Calculation of Time Dependent Viscous Incompressible Flow with Free Surface," *Physics of Fluids*, Vol. 8, 1965, pp. 2182–89.

[20] Minkowycz, W., Sparrow, E., Schneider, G., and Pletcher, R., *Handbook of Numerical Heat Transfer.* New York: John Wiley & Sons Inc., 1988. ISBN 0 471–83093–3.

[21] Parameswaran, S., Srinivasan, A., and Sun, R., "Numerical aerodynamic simulation of steady and transient flows around two-dimensional bluff bodies using the nonstaggered Grid System," *Numerical Heat Transfer, Part A*, Vol. 21, 1992, pp. 443–461.

[22] Acharya, S. and Moukalled, F., "Improvements to incompressible flow calculation on a nonstaggered curvilinear grid," *Numerical Heat Transfer, Part B*, Vol. 15, 1989, pp. 131–152.

[23] Peric, M., Kessler, R., and G., S., "Comparison of finite-volume numerical methods with staggered and colocated grids," *Computers and Fluids*, Vol. 16, 1988, pp. 389–403.

[24] Lapworth, B. L., "Examination of pressure oscillations arising in the computation of cascade flow using a boundary-fitted co-ordinate system," *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, Vol. 8, 1988, pp. 387–404.

[25] Jang, D., Jetli, R., and Acharya, S., "Comparison of the PISO, SIMPLER, and SIMPLEC algorithms for the treatment of the pressure-velocity coupling in steady flow problems," *Numerical Heat Transfer*, Vol. 10, 1986, pp. 209–228.

[26] Shih, T., "Primitive-variable formulations using nonstaggered grids," *Numerical Heat Transfer*, Vol. 7, 1984, pp. 413–428.

[27] Wu, J. and Rath, H., "Finite-difference method of incompressible flows with Rotation and moving boundary in a nonstaggered grid," *Numerical Heat Transfer (Part B)*, Vol. 26, 1994, pp. 189–206.

[28] Jessee, J. and Fiveland, W., "A cell vertex algorithm for the incompressible Navier-Stokes equations on non-orthogonal grids," *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, Vol. 23, 1996, pp. 171–293.

[29] Williams, M., "Methods for calculating incompressible viscous flows," *Numerical Heat Transfer (Part B)*, Vol. 20, 1991, pp. 241–253.

[30] Rahman, M., Siikonen, T., and Miettinen, A., "A pressure-correction method for solving fluid flow problems on a collocated grids," *Numerical Heat Transfer, Part B*, Vol. 32, 1997, pp. 63–84.

[31] Peric, M., "Analysis of Pressure-Velocity Coupling on Nonorthogonal grids," *Numerical Heat Transfer (Part B)*, Vol. 17, 1990, pp. 63–82.

[32] Russell, P. and Abdallah, S., "Dilation-Free Solutions for the Incompressible Flow Equations on Nonstaggered Grids," *AIAA Journal*, Vol. 35, No. 3, 1997, pp. 585–586.

[33] Sotiropoulos, F. and Abdallah, S., "The Discrete Continuity Equation in Primitive Variable Solutions of Incompressible Flow," *Journal of Computational Physics*, Vol. 95, 1991, pp. 212–227.

[34] Sotiropoulos, F., Kim, W., and Patel, V., "A computational comparison of two incompressible Navier-Stokes solvers in three-dimensional laminar flows," *Computers and Fluids*, Vol. 23, No. 4, 1994, pp. 627–646.

[35] Sotiropoulos, F. and Abdallah, S., "A Primitive Variable Method fot the Solution of Three-Dimensional Incompressible Viscous Flow," *Journal of Computational Physics*, Vol. 103, 1992, pp. 336–349.

[36] Choi, S., Nam, H., Lee, Y., and Cho, M., "An Efficient Three-Dimensional Calculation Procedure for Incompressible Flows in Complex Geometries," *Numerical Heat Transfer (Part B)*, Vol. 23, 1993, pp. 387–400.

[37] Gu, C., "Computation of Flows with Large Body Forces," in *Numerical Methods in Laminar and Turbulent Flow: vol. VII (Part 2)*, (Swansea U.K.), 1991.

[38] Rahman, M., Miettinen, A., and Siikonen, T., "Modified Simple Formulation on a Collocated Grid with an Assessment of the Simplified QUICK Scheme," *Numerical Heat Transfer, Part B*, Vol. 30, 1996, pp. 291–314.

[39] Blosch, E., Shyy, W., and Smith, R., "The Role of Mass Conservation in Pressure-Based Algorithms," *Numerical Heat Transfer (Part B)*, Vol. 24, 1993, pp. 415–429.

[40] Zhang, G., Assanis, D., and Tamamidis, P., "Segregated Prediction of 3-D Compressible Subsonic Fluid Flows using Collocated Grids," *Numerical Heat Transfer (Part A)*, Vol. 29, 1996, pp. 757–775.

[41] Tamamidis, P. and Assanis, D. N., "Three-Dimensional Incompressible Flow Calculations with Alternative Discretization Schemes," *Numerical Heat Transfer (Part B)*, Vol. 24, 1993, pp. 57–76.

[42] Rodi, W., Majumdar, S., and Schönung, B., "Finite Volume Methods for Two-dDimensional Incompressible Flows with Complex Boundaries," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 75, 1989, pp. 369–392.

[43] Jeng, N. and Liou, Y., "On the Open Boundary Conditionfot the SIMPLE algorithm Using Nonstaggered Grids," *Numerical Heat Transfer (Part B)*, Vol. 27, 1995, pp. 23–42.

[44] Tamamidis, P., Zhang, G., and Assanis, D. N., "Comparison of Pressure-Based and Artificial Compressibility Methods for Solving 3D Steady Incompressible Viscous Flows," *Journal of Computational Physics*, Vol. 124, 1996, pp. 1–13.

[45] Mathur, S. and Murthy, J., "A Pressure-Based Method for Unstructured Meshes," *Numerical Heat Transfer (Part B)*, Vol. 31, 1997, pp. 195–215.

[46] Lien, F. and Leschziner, M., "A General Non-orthogonal Collocated Finite Volume Algorithm for Turbulent Flow at all Speeds Incorporating Second-moment Turbulence-Transport Closure, Part 1: Computational Implementation," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 114, 1994, pp. 123–148.

[47] de Vahl Davis, G., "Natural Convection of Air in a Square Cavity: a Bench Mark Numerical Solution," *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, Vol. 3, 1983, pp. 249–264.

[48] Hirsch, C., *Computational Methods for Inviscid and Viscous Flows*, Vol. 2 of *Numerical Computation of Internal and External Flows*. Chichester: John Wiley & Sons Ltd, 1990. ISBN 0–471–92351–6.

[49] Doormaal, J. and G.D., R., "Enhancements of the SIMPLE Method for Predicting Incompressible Fluid Flows," *Numerical Heat Transfer*, Vol. 7, 1984, pp. 147–163.

[50] Peric, M., "Numerical Methods for Computing Turbulent Flows," in *An Introduction to the Modeling of Turbulence*, von Karman Institute for Fluid Dynamics Lecture Series 1997, 1997.

[51] Patankar, S. and Spalding, D., "A Calculation Procedure for Heat, Mass and Momentum Transfer in Three-Dimensional Parabolic Flows," *Int. J. of Heat and Mass Transfer*, Vol. 15, 1972, pp. 1787–1806.

[52] Rincon, J. and Elder, R., "A High-Resolution Pressure-Based Method for Compressible Flows," *Computers and Fluids*, Vol. 26, No. 3, 1997, pp. 217–231.

[53] Leonard, B., "A Stable and Accurate Convective Modelling Procedure Based on Quadratic Upstream Interpolation," *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*, Vol. 19, 1979, pp. 59–98.